Открытая олимпиада школьников по математике

11 марта 2018 г.

8 класс

1 вариант

1. (2 балла) Существует ли прямоугольный параллелепипед с целочисленными сторонами, у которого площадь поверхности численно равна объёму?

Ответ: Да, существует.

Решение: Подходит, например, куб $6 \times 6 \times 6$. И площадь поверхности, и объём численно равны 216.

2. (3 балла) На большем основании AD равнобедренной трапеции $ABCD$ отмечена точка X так, что $AB = AX$. На луче AB выбрана точка E такая, что $DE \parallel BX$. Докажите, что $AD + CE \geqslant BE + ED$.

Решение: $AB = AX$, $DE \parallel BX$, значит, по теореме Фалеса, $AD = AE$. По неравенству треугольника $CE + CD \geqslant DE$, но $CD = AB$, так как трапеция равнобедренная. Исходя из всего вышеперечисленного, $AD + CE = AE + CE = AB + BE + CE \geqslant BE + ED$.

3. (3 балла) Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 20. Биссектриса угла B пересекает прямые AD и CD в точках K и L соответственно. Найдите CL, если известно, что $DK = 4$.

Ответ: 3 или 7

Решение: $\angle ABK = \angle BLC$, как накрест лежащие. Аналогично $\angle CBL = \angle BKA$. Поскольку точки B, K и L лежат на биссектрисе, все эти четыре угла равны.

$\angle BKA = \angle DKL$: в зависимости от того, какая из точек K и L лежит на стороне параллелограмма, а какая — снаружи, это либо один и тот же угол, либо два вертикальных угла. Аналогично $\angle DLK = \angle BLC$, откуда треугольник DLK равнобедренный, $DK = DL = 4$.

Также равнобедренными оказываются треугольники BCL и BAK: $L = BC$ и $AB = AK$. Значит, большая и меньшая стороны параллелограмма отличаются на длину $DK = DL = 4$. Так как периметр параллелограмма равен 20, эти стороны 7 и 3.

$L = BC$, значит, $L = 7$ или $L = 3$, в зависимости от того, является ли BC большей или меньшей стороной параллелограмма, а это в свою очередь зависит от того, какая из точек K и L лежит на стороне параллелограмма, а какая снаружи.

4. (3 балла) Из множества трёхзначных чисел, не содержащих в своей записи цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, выписали на бумагу несколько чисел таким образом, что никакие два числа не могут быть получены друг из друга перестановкой двух рядом стоящих цифр. Какое наибольшее количество таких чисел могло быть написано?

Ответ: 40

Решение:

На то, может быть написано число или нет, влияют только числа, состоящие из того же набора цифр.

Допустим, написано какое-то число АБВ, состоящее из трёх различных цифр. Это значит, что числа БАВ и АВБ уже не могут быть написаны. Среди чисел, состоящих из этих же цифр остались БВА, ВАБ и ВБА. Первые два могут быть записаны вместе, а третье не может быть записано вместе ни с одним из остальных. Значит, среди шести чисел состоящих из цифр А, Б и В могут быть записаны максимум 3. Существует 4 способа выбрать цифры А, Б, В среди 6, 7, 8 и 9. Всего получается максимум 12 чисел.

Среди чисел ААБ, АБА, БАА могут быть записаны максимум 2: ААБ и БАА. Цифра А выбирается 4 способами, цифра Б тремя, значит, получается 24 числа.

И, наконец, все 4 числа, состоящие из трёх одинаковых цифр каждое, могут быть выписаны. Итого получается 40 чисел.

5. (3 балла) Решите уравнение $a + b + \text{НОД}(a, b) + \text{НОК}(a, b) = 143$.

Ответ: Решений нет

Решение:

Обозначим $d = \text{НОД}(a, b)$. Тогда для каких-то k и l выполняются равенства $a = kd$, $b = ld$, $\text{НОК}(a, b) = kld$. Соответственно, уравнение принимает вид $kd + ld + d + kld = 143$ или $(k+1)(l+1)d = 11 \cdot 13$. Поскольку $k+1$ и $l+1$ больше 1, какое-то из них равно 11, а какое-то равно 13. Следовательно $d = 1$, $a = k$, $b = l$, то есть всего два возможных ответа: $a = 10$, $b = 12$ или наоборот.

Однако, эти числа не взаимно простые $(d \neq 1)$, поэтому на самом деле они не подходят.

6. (3 балла) На клетчатой доске 3×3 стоят рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Каждый из них сказал: «Среди моих соседей ровно три лжеца». Сколько лжецов на доске?

Соседями считаются люди, находящиеся на клетках, имеющих общую сторону.

Ответ: 5.

Решение: На угловых клетках, очевидно, стоят лжецы: у них просто нет трёх соседей.

Если в центре стоит рыцарь, тогда все люди на боковых клетках также оказываются лжецами. Но в этом случае у рыцаря 4 соседа лжеца, а не три. Получаем противоречие.

Если же в центре лжец, то у людей на боковых клетках оказываются по три соседа лжеца, то есь они рыцари. Теперь проверяем, что человек в центре действительно лжец: у него нет трёх соседей лжецов.

7. (4 балла) По кругу стоят 23 блюдечка, на них разложены 46 пирожков. За один ход разрешается взять 2 пирожка, лежащие на одном блюдечке, и переложить их на 2 соседних блюдечка. При любом ли начальном расположении пирожков можно добиться того, чтобы на всех блюдечках оказалось поровну пирожков?

Ответ: Нет, не при любом.

Решение: Занумеруем блюдечки по порядку числами от 0 до 22. Для каждого пирожка возьмём номер блюдечка, на котором он находится. Заметим, что сумма этих 46 чисел не будет менять свой остаток при делении на 23: один из пирожков всегда передвигается на тарелочку с номером, большим на 1 или с номером, меньшим на 22, а второй — наоборот, с номером, меньшим на 1 или с номером, большим на 22.

В конечной позиции сумма этих чисел даёт фиксированный остаток, а в начальной позиции этот остаток может быть сделан каким угодно: например, мы можем положить все пирожки, кроме одного, на блюдечко с номером 0, а последний положить на блюдечко с каким угодно номером.

Значит, можно добиться того, чтобы в начальной позиции сумма этих пятидесяти чисел давала не тот остаток при делении на 23, который требуется в конечной позиции. Соответственно, получается начальная позиция, из которой невозможно достигнуть требуемой конечной.

8. (4 балла) Десятичную запись четырёхзначного число АБВГ, состоящего из различных цифр, разбили на три части тремя способами, после чего составили три квадратных уравнения $\text{А}x^2 + \text{Б}x + \text{ВГ} = 0$, $\text{А}x^2 + \text{БВ}x + \text{Г} = 0$ и $\text{АБ}x^2 + \text{В}x + \text{Г} = 0$. Оказалось, что все они имеют корни. Найдите все возможные значения АБВГ.

АБ, БВ и ВГ здесь не произведения цифр, а двузначные числа. Не только в записи числа АБВГ, но и в записях этих двухзначных чисел первые цифры не могут быть равны 0.

Ответ: 1920 или 2910.

Решение: Докажем сначала, что $\text{Г} = 0$. Из первого уравнения получаем, что $\text{Б}^2 \geqslant 4 \cdot \text{А} \cdot \text{ВГ}$. Поскольку $\text{Б}^2 \leqslant 81$, получаем, что $\text{ВГ} \leqslant 20$, то есть $\text{Г} = 0$ или $\text{В} = 1$ (так как нулю никакая цифра, кроме Г, не может быть равна).

Если $\text{В} = 1$, из третьего уравнения получаем $1 = \text{В}^2 > 4 \cdot \text{АБ} \cdot \text{Г}$, что возможно только когда правая часть равна 0, то есть когда $\text{Г} = 0$. Это условие обеспечивает наличие корней у второго и третьего уравнений.

Вернёмся к первому уравнению. $\text{ВГ} = 10 \cdot \text{В}$, откуда $81 \geqslant \text{Б}^2 \geqslant 40 \cdot \text{А} \cdot \text{В}$. Поскольку А и В это различные цифры, одна из них равна 1, а вторая — 2. Также мы получаем, что $\text{Б}^2 \geqslant 80$, откуда $\text{Б} = 9$.

Открытая олимпиада школьников по математике

11 марта 2018 г.

8 класс

2 вариант

1. (2 балла) Существует ли прямоугольный параллелепипед с целочисленными сторонами, у которого площадь поверхности численно равна сумме длин всех двенадцати рёбер?

Ответ: Да, существует.

Решение: Подходит, например, куб $2\times2\times2$. И площадь, и сумма длин рёбер составляют 24.

2. (3 балла) На большем основании AD равнобедренной трапеции $ABCD$ отмечена точка K так, что $DK = CD$. На луче DC выбрана точка L такая, что $AL \parallel CK$. Докажите, что $AL + CL \leqslant AD + BL$.

Решение: $DK = CD$, $AL \parallel CK$, значит, по теореме Фалеса, $AD = DL$. По неравенству треугольника $AB + BL \geqslant AL$, но $CD = AB$, так как трапеция равнобедренная. Исходя из всего вышеперечисленного, $AD + BL = DL + BL = CD + CL + BL = AB + BL + CL \geqslant AL + CL$.

3. (3 балла) Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 32. Биссектриса угла C пересекает прямые AD и AB в точках E и F соответственно. Найдите, чем равно BF, если известно, что $AE = 2$.

Ответ: 7 или 9

Решение: $\angle BCE = \angle CED$, как накрест лежащие. Аналогично $\angle BFC = \angle FCD$. Поскольку точки C, E и F лежат на биссектрисе, все эти четыре угла равны.

$\angle BFC = \angle AFE$: в зависимости от того, какая из точек E и F лежит на стороне параллелограмма, а какая — снаружи, это либо один и тот же угол, либо два вертикальных угла. Аналогично $\angle CED = \angle AEF$, откуда треугольник AFE равнобедренный, $AE = AF = 2$.

Также равнобедренными оказываются треугольники FBC и CED: $BF = BC$ и $CD = ED$. Значит, большая и меньшая стороны параллелограмма отличаются на длину $AE = AF = 2$. Так как периметр параллелограмма равен 32, эти стороны 7 и 9.

$BF = BC$, значит, $BF = 7$ или $BF = 9$, в зависимости от того, является ли BC большей или меньшей стороной параллелограмма, а это в свою очередь зависит от того, какая из точек E и F лежит на стороне параллелограмма, а какая снаружи.

4. (3 балла) Из множества трёхзначных чисел, не содержащих в своей записи цифр 0, 6, 7, 8, 9, выписали на бумагу несколько чисел таким образом, что никакие два числа не могут быть получены друг из друга перестановкой двух рядом стоящих цифр. Какое наибольшее количество таких чисел могло быть написано?

Ответ: 75

Решение:

На то, может быть написано число или нет, влияют только числа, состоящие из того же набора цифр.

Допустим, написано какое-то число АБВ, состоящее из трёх различных цифр. Это значит, что числа БАВ и АВБ уже не могут быть написаны. Среди чисел, состоящих из этих же цифр остались БВА, ВАБ и ВБА. Первые два могут быть записаны вместе, а третье не может быть записано вместе ни с одним из остальных. Значит, среди шести чисел состоящих из цифр А, Б и В могут быть записаны максимум 3. Существует 10 способов выбрать цифры А, Б, В среди 1, 2, 3, 4 и 5. Всего получается максимум 30 чисел.

Среди чисел ААБ, АБА, БАА могут быть записаны максимум 2: ААБ и БАА. Цифра А выбирается пятью способами, цифра Б четырьмя, значит, получается 40 чисел.

И, наконец, все 5 чисел, состоящие из трёх одинаковых цифр каждое, могут быть выписаны. Итого получается 75 чисел.

5. (3 балла) Решите уравнение $a + b + \text{НОД}(a, b) + \text{НОК}(a, b) = 187$.

Ответ: $a = 10$, $b = 16$ или наоборот.

Решение:

Обозначим $d=$ НОД(a,b). Тогда для каких-то k и l выполняются равенства $a=kd$, $b=ld$, НОК$(a,b)=kld$. Соответственно, уравнение принимает вид $kd+ld+d+kld=187$ или $(k+1)(l+1)d=11\cdot 17$. Поскольку $k+1$ и $l+1$ больше 1, какое-то из них равно 11, а какое-то равно 17. Следовательно $d=1$, $a=k$, $b=l$, то есть всего два возможных ответа: $a=10$, $b=16$ или наоборот.

Однако, эти числа не взаимно простые $(d\neq 1)$, поэтому на самом деле они не подходят.

6. (3 балла) На клетчатой доске 2×4 стоят рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Каждый из них сказал: «Среди моих соседей ровно три лжеца». Сколько лжецов на доске?

Соседями считаются люди, находящиеся на клетках, имеющих общую сторону.

Ответ: 6.

Решение: На угловых клетках, очевидно, стоят лжецы: у них просто нет трёх соседей.

Ситуация, когда все люди на доске — лжецы невозможна, так как получается, что четверо из этих лжецов говорят правду.

Значит, есть хотя бы один рыцарь. Тогда все его соседи лжецы, и получается следующая ситуация (точностью до симметрии):

Л	Р	Л	Л
Л	Л	?	Л

На клетке, помеченной вопросиком, может стоять только рыцарь, поскольку все его соседи лжецы. Не забудем проверить, что у его левого и верхнего соседа при это только два соседа лжеца, то есть они действительно говорят неправду.

Таким образом получается 6 лжецов.

7. (4 балла) По кругу стоят 25 тарелочек, на них разложены 50 булочек. За один ход разрешается взять 2 булочки, лежащие на одной тарелочке, и переложить их на 2 соседних тарелочки. При любом ли начальном расположении булочек можно добиться того, чтобы на всех тарелочках оказалось поровну булочек?

Ответ: Нет, не при любом.

Решение: Занумеруем тарелочки по порядку числами от 0 до 24. Для каждой булочки возьмём номер тарелочки, на которой она находится. Заметим, что сумма этих пятидесяти чисел не будет менять свой остаток при делении на 25: одна из булочек всегда передвигается на тарелочку с номером, большим на 1 или с номером, меньшим на 24, а вторая — наоборот, с номером, меньшим на 1 или с номером, большим на 24.

В конечной позиции сумма этих чисел даёт фиксированный остаток, а в начальной позиции этот остаток может быть сделан каким угодно: например, мы можем положить все булочки, кроме одной, на тарелочку с номером 0, а последнюю положить на тарелочку с каким угодно номером.

Значит, можно добиться того, чтобы в начальной позиции сумма этих пятидесяти чисел давала не тот остаток при делении на 25, который требуется в конечной позиции. Соответственно, получается начальная позиция, из которой невозможно достигнуть требуемой конечной.

8. (4 балла) Десятичную запись четырёхзначного число АБВГ, не содержащего девяток, разбили на три части тремя способами, после чего составили три квадратных уравнения Аx^2+ Б$x+$ ВГ $=0$, Аx^2+ БВ$x+$ Г $=0$ и АБx^2+ В$x+$ Г $=0$. Оказалось, что все они имеют корни. Найдите все возможные значения АБВГ.

АБ, БВ и ВГ здесь не произведения цифр, а двузначные числа. Не только в записи числа АБВГ, но и в записях этих двухзначных чисел первые цифры не могут быть равны 0.

Ответ: 1710 или 1810.

Решение: Из первого уравнения получаем, что $\text{Б}^2\geqslant 4\cdot\text{А}\cdot\text{ВГ}$. Поскольку по условию $\text{Б}^2\leqslant 64$, получаем, что ВГ $\leqslant 16$, то есть В $=1$ (так как нулю никакая цифра, кроме Г, не может быть равна).

С другой стороны, из третьего уравнения получаем $1=\text{В}^2>4\cdot\text{АБ}\cdot\text{Г}$, что возможно только когда правая часть равна 0, то есть когда Г $=0$. Это условие обеспечивает наличие корней у второго и третьего уравнений.

Вернёмся к первому уравнению: $64 \geqslant \text{Б}^2 \geqslant 40 \cdot \text{А}$. Отсюда $\text{А} = 1$, а Б это 7 или 8.