Открытая олимпиада школьников по математике

11 марта 2018 г.

7 класс

1 вариант

Решения

1. (1 балл) Существуют ли четыре таких различных делящихся на 3 числа, что сумма любых трёх из них делится на четвёртое?

Ответ: Да, существуют.

Решение:

Например, числа 3, 6, 9 и 18.

Для проверки нам достаточно убедиться, что сумма этих чисел, равная 36, делится на каждое из них.

2. (2 балла) Аня готовила блинчики, рассчитывая, чтобы трём членам ее семьи досталось одинаковое количество блинов. Но что-то пошло не так: каждый третий блин Аня не смогла перевернуть; 40% от блинов, которые Аня смогла перевернуть, пригорели; а $\frac{1}{5}$ от съедобных блинов Аня уронила на пол. Сколько процентов от задуманного количества блинов Аня смогла предложить своей семье?

Ответ: 32%.

Решение:

Всего Ане удалось сохранить $\dfrac{2}{3} \cdot 0,6 \cdot 0,8 = 0,32$ от количества блинов.

3. (3 балла) По кругу стоят 20 блюдечек, на них разложены 40 пирожков. За один ход разрешается взять 2 пирожка, лежащие на одном блюдечке, и переложить их на 2 соседних блюдечка. При любом ли начальном расположении пирожков можно добиться того, чтобы на всех блюдечках оказалось поровну пирожков?

Ответ: Нет, не при любом.

Решение:

Раскрасим блюдечки в чёрный и белый цвета так, чтобы каждое чёрное соседствовало с двумя белыми и наоборот.

При выполнении операции, описанной в условии, чётность количества пирожков на чёрных блюдечках не меняется. В требуемой конечной расстановке это количество чётно, значит, если мы выберем начальную расстановку, в которой оно будет нечётно, её невозможно будет привести к нужному виду.

4. (3 балла) Дан треугольник ABC. Точки K, L и M расположили на плоскости так, что треугольники ABK, LBC и AMC оказались равны ABC. Какой знак неравенства следует поставить между полупериметром треугольника KLM и периметром треугольника ABC?

Вершины треугольников указаны в произвольном порядке: например, нельзя утрверждать, что при равенстве треугольников ABK и LBC точка A соответствует точке L.

Ответ: Периметр ABC не меньше полупериметра KLM.

Решение:

$AK + AM \geqslant KM$ по неравенству треугольника в треугольнике AKM (равенство достигается тогда, когда этот треугольник вырожденный, т.е. точка A лежит на отрезке KM. Аналогично $BL + BK \geqslant KL$ и $CL + CM \geqslant LM$.

Таким образом получаем, что $AK + AM + BK + BL + CL + CM \geqslant KM + KL + LM$.

Из равенства треугольников ABK и ABC и того, что сторона AB — общая, получаем $AK + BK = AC + BC$, аналогично $BL + CL = AB + AC$ и $AM + CM = AB + AC$. Значит, доказанное выше неравенство можно переписать как $2AB + 2BC + AC \geqslant KM + KL + KM$. Разделив это неравенство на 2, получим, что периметр ABC не меньше полупериметра KLM.

5. (3 балла) В комнате собрались рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут (и те, и другие точно есть). Им задали вопрос: «Сколько лжецов находится в комнате?». На этот вопрос были получены все возможные ответы от 1 до 100 (некоторые, возможно, несколько раз). Сколько на самом деле могло быть лжецов?

Ответ: 99 или 100.

Решение:

Поскольку всего получено 100 разных ответов и один из них точно правильный, остальные 99 ответов неверные. Значит, в комнате минимум 99 лжецов. Больше ста их тоже быть не может, так как верный ответ не превосходит 100.

Давайте теперь убедимся, что оба ответа возможны. Действительно, 99 лжецов бывает, когда комнате 100 человек и все дают разные ответы, а 100 лжецов — когда 101 человек, и какой-то неправильный ответ дают двое.

6. (3 балла) У Васи есть чертёжный инструмент — треугольник с углами 40°, 70° и 70°. Как ему с его помощью построить равносторонний треугольник?

Решение:

Построим два треугольника ABC и ABD с общей стороной AB и углами в точке A по 70°. Затем построим треугольники ACK и ADL с углами в точке A по 40°, отложенными внутрь построенных ранее углов 80°, причём так, что $AK = AL$ а $CK = DL$.

Тогда треугольник AKL будет равнобедренным с $\angle A = 2 \cdot (70^\circ - 40^\circ) = 60^\circ$, т.е. равносторонним.

7. (4 балла) С числом, записанным на доске, разрешается выполнять одну из следующих операций:

1) Если в исходном числе есть цифра, не равная 9, имеющая две соседние цифры, большие 0, можно увеличить эту цифру на 1, а соседние уменьшить на 1.

2) Вычесть из любой ненулевой цифры, кроме последней, 1, а к следующей прибавить 3.

3) Уменьшить любую достаточно большую цифру на 7.

Если в результате какой-то из этих операций в числе на одном или нескольких первых местах оказываются нули, они автоматически отбрасываются.

Изначально на доске было записано число из ста восьмёрок. В конце осталось однозначное число. Какое именно?

Ответ: 3

Решение:

Первая операция соответствует вычитанию числа вида $910 \cdot 0$, вторая и третья — вычитанию $70 \cdot 0$. Обе эти операции не меняют остаток от деления исходного числа на 7, так как 91 делится на 7.

$1001 = cdot91$, а $888888 = 888 \cdot 1001$. Значит, для вычисления остатка от деления исходного числа на 7, количество восьмёрок, кратное 6, можно отбросить. Остаётся число $8888 = 8008 + 875 + 5 = 8 \cdot 1001 + 7 \cdot 125 + 5$ даёт остаток 5.

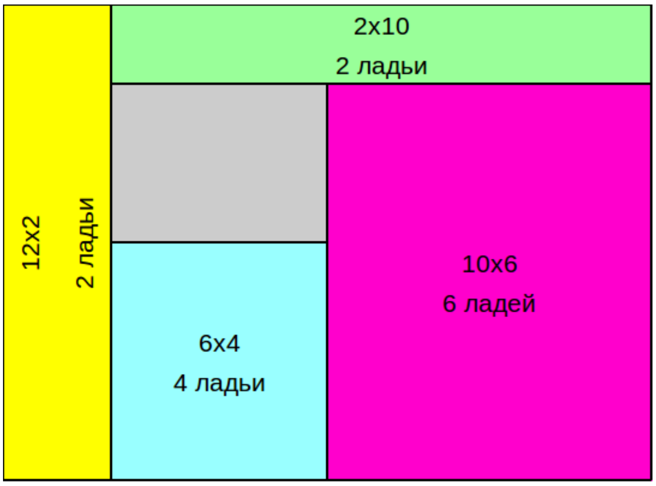
8. (5 баллов) Из клетчатого поля 12×12 вырезали квадрат 4×4, лежащий на пересечении горизонталей с третьей по шестую и таких же вертикалей. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга ладей можно расставить на этом поле, если ладьи не бьют через вырезанные клетки?

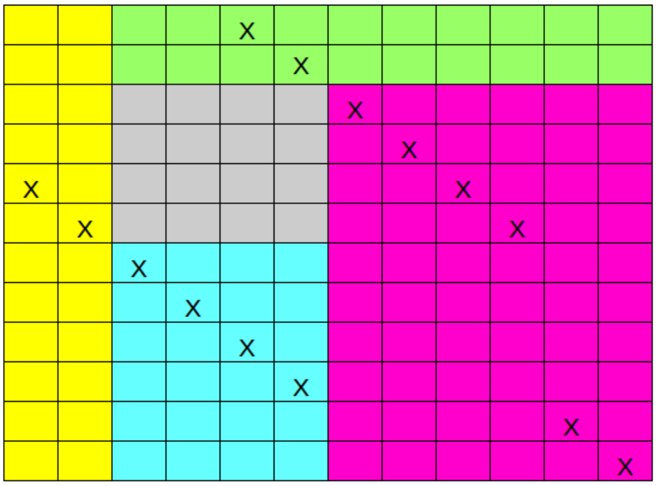
Ответ: 14

Решение:

Доступная часть доски разрезается на следующие четыре области, в каждой из которых может стоять не больше указанного количества ладей (см. левый рисунок), так как в каждом прямоугольнике не может стоять большей ладей, чем длина его меньшей стороны. Значит, общее количество ладей не превосходит 14.

Пример для 14 ладей изображён на правом рисунке.





Открытая олимпиада школьников по математике

11 марта 2018 г.

7 класс

2 вариант

Решения

1. (1 балл) Существуют ли четыре таких различных чётных числа, что сумма любых трёх из них делится на четвёртое?

Ответ: Да, существуют.

Решение:

Например, числа 2, 4, 6 и 12.

Для проверки нам достаточно убедиться, что сумма этих чисел, равная 24, делится на каждое из них.

2. (2 балла) Аня готовила блинчики, рассчитывая, чтобы пяти членам ее семьи досталось одинаковое количество блинов. Но что-то пошло не так: каждый пятый блин Аня не смогла перевернуть; 49% от блинов, которые Аня смогла перевернуть, пригорели; а $\frac{1}{6}$ от съедобных блинов Аня уронила на пол. Сколько процентов от задуманного количества блинов Аня смогла предложить своей семье?

Ответ: 34%.

Решение:

Всего Ане удалось сохранить $0,8 \cdot 0,51 \cdot \dfrac{5}{6} = 0,34$ от количества блинов.

3. (3 балла) По кругу стоят 30 тарелочек, на них разложены 60 булочек. За один ход разрешается взять 2 булочки, лежащие на одной тарелочке, и переложить их на 2 соседних тарелочки. При любом ли начальном расположении булочек можно добиться того, чтобы на всех тарелочках оказалось поровну булочек?

Ответ: Нет, не при любом.

Решение:

Раскрасим тарелочки в чёрный и белый цвета так, чтобы каждая чёрная соседствовало с двумя белыми и наоборот.

При выполнении операции, описанной в условии, чётность количества булочек на чёрных тарелочках не меняется. В требуемой конечной расстановке это количество чётно, значит, если мы выберем начальную расстановку, в которой оно будет нечётно, её невозможно будет привести к нужному виду.

4. (3 балла) Дан треугольник ABC. Точки K, L и M расположили на плоскости так, что треугольники KAM, CLM и KLB оказались равны треугольнику KLM. Какой знак неравенства следует поставить между периметром треугольника KLM и полупериметром треугольника ABC?

Вершины треугольников указаны в произвольном порядке: например, нельзя утрверждать, что при равенстве треугольников KAM и CLM точка K соответствует точке C.

Ответ: Периметр KLM не меньше полупериметра ABC.

Решение:

$AK+KB \geqslant AB$ по неравенству треугольника в треугольнике ABK (равенство достигается тогда, когда этот треугольник вырожденный, т.е. точка K лежит на отрезке AB. Аналогично $BL+CL \geqslant BC$ и $AM+CM \geqslant AC$.

Таким образом получаем, что $AK+KB+BL+CL+AM+CM \geqslant AB+BC+AC$.

Из равенства треугольников KAM и KLM и того, что сторона KM — общая, получаем $AK + AM = KL + LM$, аналогично $CL + CM = KL + LM$ и $KB + BL = KM + LM$. Значит, доказаннное выше неравенство можно переписать как $2KL + 2KM + 2LM \geqslant AB + BC + AC$. Разделив это неравенство на 2, получим, что периметр KLM не меньше полупериметра ABC.

5. (3 балла) В комнате собрались рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут (и те, и другие точно есть). Им задали вопрос: «Сколько лжецов находится в комнате?». На этот вопрос были получены все возможные ответы от 1 до 200 (некоторые, возможно, несколько раз). Сколько на самом деле могло быть лжецов?

Ответ: 199 или 200.

Решение:

Поскольку всего получено 200 разных ответов и один из них точно правильный, остальные 199 ответов неверные. Значит, в комнате минимум 199 лжецов. Больше двухсот их тоже быть не может, так как верный ответ не превосходит 200.

Давайте теперь убедимся, что оба ответа возможны. Действительно, 199 лжецов бывает, когда комнате 200 человек и все дают разные ответы, а 200 лжецов — когда 201 человек, и какой-то неправильный ответ дают двое.

6. (3 балла) У Васи есть чертёжный инструмент — треугольник с углами 80°, 50° и 50°. Как ему с его помощью построить равносторонний треугольник?

Решение:

Построим два треугольника ABC и ABD с общей стороной AB и углами в точке A по 80°. Затем построим треугольники ACK и ADL с углами в точке A по 50°, отложенными внутрь построенных ранее углов 80°, причём так, что $AK = AL$ а $CK = DL$.

Тогда треугольник AKL будет равнобедренным с $\angle A = 2 \cdot (80^\circ - 50^\circ) = 60^\circ$, т.е. равносторонним.

7. (4 балла) С числом, записанным на доске, разрешается выполнять одну из следующих операций:

1) Если в исходном числе есть цифра, не равная 9, имеющая две соседние цифры, большие 0, можно увеличить эту цифру на 1, а соседние уменьшить на 1.

2) Вычесть из любой ненулевой цифры, кроме последней, 1, а к следующей прибавить 3.

3) Уменьшить любую достаточно большую цифру на 7.

Если в результате какой-то из этих операций в числе на одном или нескольких первых местах оказываются нули, они автоматически отбрасываются.

Изначально на доске было записано число из ста девяток. В конце осталось однозначное число. Какое именно?

Ответ: 3

Решение:

Первая операция соответствует вычитанию числа вида $910 \cdot 0$, вторая и третья — вычитанию $70 \cdot 0$. Обе эти операции не меняют остаток от деления исходного числа на 7, так как 91 делится на 7.

$1001 = cdot91$, а $999999 = 999 \cdot 1001$. Значит, для вычисления остатка от деления исходного числа на 7, количество девяток, кратное 6, можно отбросить. Остаётся число $9999 = 9009 + 987 + 3 = 9 \cdot 1001 + 7 \cdot 141 + 3$ даёт остаток 3.

8. (5 баллов) Из клетчатого поля 12×12 вырезали квадрат 4×4, лежащий на пересечении горизонталей с четвёртой по седьмую и таких же вертикалей. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга ладей можно расставить на этом поле, если ладьи не бьют через вырезанные клетки?

Ответ: 15

Решение:

Доступная часть доски разрезается на следующие четыре области, в каждой из которых может стоять не больше указанного количества ладей (см. левый рисунок), так как в каждом прямоугольнике не может стоять большей ладей, чем длина его меньшей стороны. Значит, общее количество ладей не превосходит 15.

Пример для 15 ладей изображён на правом рисунке.