Открытая олимпиада школьников по математике

11 марта 2018 г.

11 класс

1 вариант

1. (2 балла) В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 16$ и $BC = 10$ окружности, построенные на сторонах AB, BC и CD как на диаметрах, пересекаются в одной точке. Длина диагонали AC равна 10. Найдите длину BD.

Ответ: Ответ: 24

Решение:

Обозначим точку пересечения трех окружностей за O. Тогда так как окружности построены на сторонах трапеции AB, BC и CD как на диаметрах, то углы $\angle AOB$, $\angle BOC$ и $\angle COD$ — прямые, следовательно, точки A, O, C лежат на одной прямой и точки B, O, D лежат на одной прямой, то есть O — точка пересечения диагоналей трапеции.

Обозначим середины сторон AB, BC и CD за K, L и M соответственно. Так как KL и LM — средние линии в треугольниках ABC и BCD, $KL \parallel AC$ и $LM \parallel BD$. Значит, $KL \perp LM$, то есть треугольник KLM — прямоугольный. Кроме того, $KL = \dfrac{AC}{2} = 5$, а $KM = \dfrac{AD+BC}{2} = 13$, значит, по теореме Пифагора, $LM = 12$. Отсюда $BD = 2LM = 24$.

Вместо рассуждений со средними линиями можно рассмотреть треугольники BOC и AOD, которые подобны с коэффициентом $10 : 16 = 5 : 8$. Так как $AC = 10$, то $OC = \dfrac{5}{13}AC = \dfrac{50}{13}$. По теореме Пифагора в треугольнике BOC находим $OB = \sqrt{10^2 - \dfrac{2500}{169}} = \dfrac{120}{13}$. Отсюда $BD = \dfrac{13}{5}OB = \dfrac{13}{5} \cdot \dfrac{120}{13} = 24$.

2. (3 балла) В равногранном тетраэдре отметили основания и середины всех четырёх его медиан. Каждое основание медианы тетраэдра соединили с серединами трёх остальных. Докажите, что получившийся многогранник — прямоугольный параллелепипед.

Решение: Обозначим радиус-векторы вершин тетраэдра за $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$. Тогда основания медиан задаются формулой $\dfrac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$ и аналогичными ей, а середины медиан формулой $\dfrac{\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}+\vec{d}}{2} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+3\vec{d}}{6}$ и аналогичными ей.

Вычитая один радиус-вектор из другого, получаем векторы рёбер получившегося многогранника $\dfrac{\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}}{6}$ и аналогичные ему. При этом каждый такой вектор мы получаем два раза, т.е. всего 6 различных векторов. Кроме того, вместо с вектором $\dfrac{\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}}{6}$ мы также получаем и противоположный ему вектор $\dfrac{-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-\vec{d}}{6}$, который ему коллинеарен. Таким образом, мы уже доказали, что наш многогранник параллелепипед.

Умножив длины всех векторов на 6, понимаем, что нам достаточно доказать взаимную перпендикулярность трёх векторов: $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}$, $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}-\vec{d}$ и $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}-\vec{d}$. Рассмотрим первые два вектора. Введём дополнительные обозначения $\vec{a}-\vec{c}=\vec{x}$ и $\vec{b}-\vec{d}=\vec{y}$. Тогда нам нужно доказать, что $\vec{x}-\vec{y} \perp \vec{x}+\vec{y}$, то есть, что скалярное произведение этих векторов равно 0. Их скалярное произведение это $\vec{x}^2-\vec{y}^2$, а равенство его нулю равносильно равенству $\vec{x}^2$ и $\vec{y}^2$, то есть равенству длин $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Но это равенство означает, что два противоположных ребра тетраэдра равны, что следует из равногранности тетраэдра. Перпендикулярность остальных пар векторов доказывается аналогично.

3. (3 балла) Найдите расстояние между кривыми $y = e^{3x+5}$ и $y = (\ln x - 5)/3$.

Ответ: $\sqrt{2}(2 + \dfrac{\ln 3}{3})$.

Решение: Расстояние между графиками функций равно расстоянию между их ближайшими точками. Заметим, что функции, между графиками которых требуется найти расстояние, являются обратными друг к другу, а их графики симметричны относительно прямой $y = x$ и, кроме того, находятся по разные стороны от неё.

Если мы найдём на графике функции $y = e^{3x+5}$ точку A, ближайшую к прямой $y = x$, то точка A', симметричная ей, очевидно, будет ближайшей к этой прямой на графике функции $y = (\ln x - 5)/3$. Если провести через эти точки прямые, параллельные прямой $y = x$, графики обеих функций окажутся вне полосы, ограниченной этими прямыми, значит, расстояние между любыми двумя точками на этих графиках не меньше расстояния между этими прямыми. С другой стороны, расстояние между этими прямыми равно расстоянию между точками A и A', значит, AA' и есть искомое расстояние.

Пусть координаты точки A это $(x; e^{3x+5})$, тогда A' имеет координаты $(e^{3x+5}; x)$ и расстояние между ними

$$\rho(x) = \sqrt{(x - e^{3x+5})^2 + (e^{3x+5} - x)^2} = \sqrt{2(e^{3x+5} - x)^2} = \sqrt{2}|e^{3x+5} - x|$$

Рассмотрим функцию $f(x) = e^{3x+5} - x$ и найдем ее минимум с помощью производной: $f'(x) = 3e^{3x+5} - 1$. Приравнивая эту производную к нулю в точке x_0, мы получаем $x_0 = \dfrac{-\ln 3 - 5}{3}$.

Тогда при $x < x_0$ функция $f(x)$ убывает, а при $x > x_0$ — возрастает, следовательно в точке x_0 функция $f(x)$ достигает минимума.

$f(x_0) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{\ln 3 + 5}{3} > 0$, следовательно $f(x) > 0$ при $x \in R$.

Таким образом, $\rho(x) = \sqrt{2}(e^{3x+5} - x)$.

Заметим, что $\rho(x)$ отличается от $f(x)$ домножением на $\sqrt{2}$, следовательно, минимум функции достигается в той же точке, что и минимум функции $f(x)$. Таким образом, минимальное расстояние равно: $\sqrt{2}\left(2 + \dfrac{\ln 3}{3}\right)$.

4. (3 балла) В некоторой стране 450 городов и 6 авиакомпаний. Каждые два города соединены рейсами одной из шести авиакомпаний. Можно ли утверждать, что найдётся авиакомпания и больше 150 городов, между любыми двумя из которых можно добраться рейсами этой авиакомпании (возможно, с пересадками)?

Ответ: Нет, это не обязательно верно.

Решение: Построим контрпример. Разобъём города на 6 групп по 75 городов. Назовём эти группы A, B, C, D, E, F.

Внутри каждой группы соединим города рейсами компании номер 1.

Компания номер 2 будет соединять города группы A с городами группы B, C с D, а E с F.

Компания номер 3 будет соединять города группы A с городами группы D, B с E, а C с F.

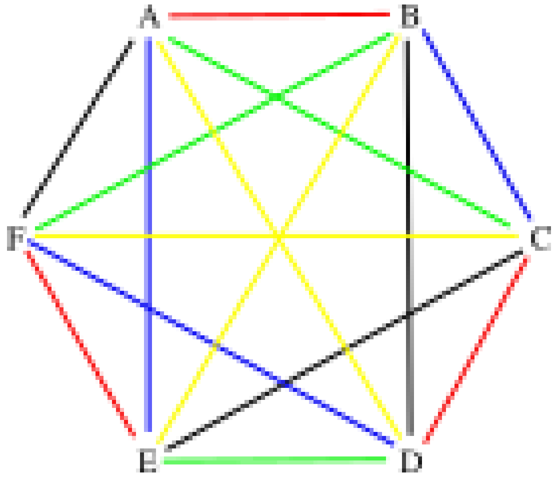
Компания номер 4 будет соединять города группы A с городами группы C, B с F, а D с E.

Компания номер 5 будет соединять города группы A с городами группы E, B с C, а D с F.

Компания номер 6 будет соединять города группы A с городами группы F, B с D, а C с E.

Таким образом, рейсы компании номер 1 связывают по 75 городов, а рейсы остальных компаний ровно по 150.

Это построение схематично изображено на рисунке. Разные компании обозначены разными цветами.



Данный контрпример, разумеется, не единственный.

5. (3 балла) Найдите все непрерывные на всей числовой оси функции, удовлетворяющие тождеству $4f(x+y) = f(x)f(y)$ и условию $f(1) = 12$.

Ответ: $f(x) = 4 \cdot 3^x$.

Решение:

Вначале докажем, что $f(x) \geqslant 0$. Действительно, $4f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2 \geqslant 0$.

Подставив в условие задачи $x = y = 0$, получаем $4f(0) = f(0) \cdot f(0)$ откуда $f(0) = 0$ или $f(0) = 4$. Если $f(0) = 0$, то $4f(x+0) = f(x)f(0)$, откуда $f(x) = 0$ для любого x, что неверно. Следовательно, $f(0) = 4$.

Подставляя $y = 1$, получаем $4f(x+1) = f(x) \cdot f(1)$, то есть $f(x+1) = 3f(x)$. Отсюда для любого натурального n находим $f(n) = f(0)3^n = 4 \cdot 3^n$.

Также легко по индукции доказать формулу $f(x_1 + x_2 + ... + x_n) = \frac{1}{4^{n-1}} f(x_1)f(x_2)\dots f(x_n)$, откуда, в частности, $f(1) = f\left(\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{4^{n-1}}(f(\frac{1}{n}))^n$. Значит, $f\left(\frac{1}{n}\right)^n = 3 \cdot 4^n$, откуда $f\left(\frac{1}{n}\right) = 4 \cdot 3^{\frac{1}{n}}$ для всех натуральных n.

Отсюда $f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{4^{m-1}}(f(\frac{1}{n}))^m = \frac{1}{4^{m-1}} 4^m \cdot 3^{\frac{m}{n}} = 4 \cdot 3^{\frac{m}{n}}$ для натуральных m и n.

Теперь разберёмся с отрицательными дробями: $4f(0) = 4f\left(\frac{m}{n} - \frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{m}{n}\right) f\left(-\frac{m}{n}\right)$, откуда $f\left(-\frac{m}{n}\right) = 4 \cdot 3^{-\frac{m}{n}}$.

Таким образом, функция $f(x) = 4 \cdot 3^x$ для всех рациональных чисел. Функция в правой части равенства также непрерывна, а если две функции совпадают для всех рациональных чисел, то они совпадают на всей вещественной оси.

6. (3 балла) Пусть x, y, z и t — неотрицательные числа, такие что $x+y+z+t = 5$. Докажите неравенство

$$\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+1} + \sqrt{z^2+y^2} + \sqrt{z^2+t^2} + \sqrt{t^2+9} \geqslant 10$$

.

Решение:

Рассмотрим на плоскости следующие точки: $A(0,0)$; $B(x,1)$; $C(x+y, 1+x)$; $D(x+y+z, 1+x+y)$; $E(x+y+z+t, 1+x+y+z)$; $F(x+y+z+t+3, 1+x+y+z+t)$. Тогда длина ломаной $ABCDEF$ совпадает с выражением, которое требуется оценить. По неравенству треугольника длина ломаной $ABCDEF$ не меньше длины отрезка AF. С учетом того, что $x+y+z+t = 5$, координаты точки F это $(8,6)$ а длина отрезка $AF = 10$.

7. (4 балла) Решите уравнение:

$$\sin x + \sin 3x + \ldots + \sin 2017x = \cos x + \cos 3x + \ldots + \cos 2017x.$$

Ответ:

1) $x = \dfrac{\pi k}{1009}$, $k \in \mathbb{Z}$, k не делится на 1009.

2) $x = \dfrac{\pi + 4\pi k}{4036}, k \in \mathbb{Z}$.

Решение:

Докажем сначала следующие формулы по индукции в случае, если $\sin x \neq 0$:

$$\sum_{k=1}^{n} \sin((2k-1)x) = \frac{\sin^2(nx)}{\sin x}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \cos((2k-1)x) = \frac{\sin(2nx)}{2\sin x} = \frac{\sin(nx)\cos(nx)}{\sin x}$$

Первая формула. База $n = 1$: $\sin x = \dfrac{\sin^2 x}{\sin x}$ — верное утверждение.

Переход: предположим, что утверждение верно для некоторого n, докажем, что оно верно и для $n+1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \sin((2k-1)x) = \sum_{k=1}^{n} \sin((2k-1)x) + \sin((2n+1)x) = \frac{\sin^2(nx)}{\sin x} + \sin((2n+1)x) =$$

$$= \frac{\sin^2(nx) + \sin(2nx + x)\sin x}{\sin x} = \frac{\sin^2(nx) + \sin(2nx)\cos x \sin x + \cos(2nx)\sin^2 x}{\sin x} =$$

$$= \frac{\sin^2(nx) + 2\sin(nx)\cos(nx)\cos x \sin x + (\cos^2(nx) - \sin^2(nx))\sin^2 x}{\sin x} =$$

$$= \frac{\sin^2(nx)\cos^2 x + 2\sin(nx)\cos(nx)\cos x \sin x + \cos^2(nx)\sin^2 x}{\sin x} =$$

$$= \frac{(\sin(nx)\cos(x) + \cos nx \sin x)^2}{\sin x} = \frac{\sin^2((n+1)x)}{\sin x}.$$

Вторая формула. База $n = 1$: $\cos x = \dfrac{\sin 2x}{2\sin x}$ — верное утверждение.

Переход: предположим, что утверждение верно для некоторого n, докажем, что оно верно и для $n + 1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \cos((2k-1)x) = \sum_{k=1}^{n} \cos((2k-1)x) + \cos((2n+1)x) = \frac{\sin(2nx)}{2\sin x} + \cos((2n+1)x) =$$

$$= \frac{\sin(2nx) + 2\cos(2nx + x)\sin x}{2\sin x} = \frac{\sin(2nx) + 2\cos(2nx)\cos x \sin x - 2\sin(2nx)\sin^2 x}{2\sin x} =$$

$$= \frac{\sin(2nx)(1 - 2\sin^2 x) + \cos(2nx)\sin 2x}{2\sin x} = \frac{\sin(2nx)\cos(2x) + \cos(2nx)\sin 2x}{2\sin x} = \frac{\sin(2(n+1)x)}{2\sin x}.$$

Разберём сначала случай $\sin x = 0$. В этом случае левая часть уравнения превращается в 0, а правая это 1009 или -1009, то есть числа $x = \pi k$ при целых k не являются решениями задачи.

Воспользовавшись доказанными выше формулами, превратим исходное уравнение в $\dfrac{\sin^2 1009x}{\sin x} = \dfrac{\sin 1009x \cos 1009x}{\sin x}$, откуда $\sin 1009x = 0$ или $\sin 1009x = \cos 1009x$.

В первом случае получаем $1009x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$, откуда $x = \dfrac{\pi k}{1009}, k \in \mathbb{Z}$. При этом, так как $\sin x \neq 0$, число k не делится на 1009.

Во втором случае получаем $1009x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, откуда $x = \dfrac{\pi + 4\pi k}{4036}, k \in \mathbb{Z}$. Для таких чисел $\sin x \neq 0$, поэтому из этого множества решений никакие числа исключать не приходится.

8. (4 балла) С числом, записанным на доске, разрешается делать следующую операцию: стирать две соседние цифры, сумма которых не превосходит 9, и записывать эту сумму на их место. Изначально было написано 200-значное число $12341234\ldots1234$. С числом на доске проделывали указанную операцию до тех пор, пока это не стало невозможно. Какое наибольшее число могло оказаться на доске в результате?

Ответ:

$64\ldots64$ — 100-значное число.

Решение:

Сумма цифр исходного числа $(1 + 2 + 3 + 4) \cdot 50 = 500$. Сумма цифр конечного числа такая же.

Разобъём цифры конечного числа на пары: первую со второй, третью с четвёртой, и т.д. Последняя цифра может остаться без пары. В каждой паре сумма цифр не меньше десяти, откуда в числе не может быть больше 100 цифр. Поскольку 100-значные числа превосходят все числа с меньшим количеством знаков, ответ в первую очередь стоит искать среди них.

Если в числе ровно 100 цифр, и сумма цифр в какой-то паре больше 10, то общая сумма цифр больше 500. Значит, в каждом 100-значном числе, которое может у нас получиться, сумма цифр в каждой паре ровно 10.

Обратите внимание: утверждение о том, что в каждом таком числе сумма соседних цифр равна 10 вообще говоря, неверно: может получиться, например, число $376464\ldots64$, в котором это условие нарушается.

В каждой паре нам необходимо максимизировать первую цифру и минимизировать вторую. Поскольку каждая пара цифр получается указанными в условии операциями из 1234, вторая цифра не меньше 4 и наибольший вариант для каждой пары это 64, откуда мы получаем ответ.

Открытая олимпиада школьников по математике

11 марта 2018 г.

11 класс

2 вариант

1. (2 балла) В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 12$ и $BC = 8$ окружности, построенные на сторонах AB, BC и CD как на диаметрах, пересекаются в одной точке. Длина диагонали AC равна 12. Найдите длину BD.

Ответ: Ответ: 16

Решение:

Обозначим точку пересечения трех окружностей за O. Тогда так как окружности построены на сторонах трапеции AB, BC и CD как на диаметрах, то углы $\angle AOB$, $\angle BOC$ и $\angle COD$ — прямые, следовательно, точки A, O, C лежат на одной прямой и точки B, O, D лежат на одной прямой, то есть O — точка пересечения диагоналей трапеции.

Обозначим середины сторон AB, BC и CD за K, L и M соответственно. Так как KL и LM — средние линии в треугольниках ABC и BCD, $KL \parallel AC$ и $LM \parallel BD$. Значит, $KL \perp LM$, то есть треугольник KLM — прямоугольный. Кроме того, $KL = \dfrac{AC}{2} = 6$, а $KM = \dfrac{AD+BC}{2} = 10$, значит, по теореме Пифагора, $LM = 8$. Отсюда $BD = 2LM = 16$.

Вместо рассуждений со средними линиями можно рассмотреть треугольники BOC и AOD, которые подобны с коэффициентом $8 : 12 = 2 : 3$. Так как $AC = 12$, то $OC = \dfrac{2}{5}AC = \dfrac{24}{5}$. По теореме Пифагора в треугольнике BOC находим $OB = \sqrt{8^2 - \dfrac{24^2}{5^2}} = \dfrac{32}{5}$. Отсюда $BD = \dfrac{5}{2}OB = \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{32}{5} = 16$.

2. (3 балла) В ортоцентрическом тетраэдре отметили основания и середины всех четырёх его медиан. Каждое основание медианы тетраэдра соединили с серединами трёх остальных. Докажите, что в получившемся многограннике все рёбра имеют равную длину.

Решение: Обозначим радиус-векторы вершин тетраэдра за $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$. Тогда основания медиан задаются формулой $\dfrac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$ и аналогичными ей, а середины медиан формулой $\dfrac{\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}+\vec{d}}{2} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+3\vec{d}}{6}$ и аналогичными ей.

Вычитая один радиус-вектор из другого, получаем векторы рёбер получившегося многогранника $\dfrac{\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}}{6}$ и аналогичные ему. При этом каждый такой вектор мы получаем два раза, т.е. всего 6 различных векторов. Кроме того, вместо с вектором $\dfrac{\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}}{6}$ мы также получаем и противоположный ему вектор $\dfrac{-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-\vec{d}}{6}$, который имеет ту же длину. Умножив длины всех векторов на 6, понимаем, что нам достаточно доказать равенства $|\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}| = |\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}-\vec{d}| = |\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}|$.

Также введём обозначения $\vec{a}-\vec{c} = \vec{x}$ и $\vec{b}-\vec{d} = \vec{y}$. Эти векторы соответствуют двум противоположным рёбрам тетраэдра. Поскольку тетраэдр ортоцентрический, эти рёбра перпендикулярны, то есть $\vec{x}\vec{y} = 0$. Отсюда получаем $\vec{x}^2 - 2\vec{x}\vec{y} + \vec{y}^2 = \vec{x}^2 + 2\vec{x}\vec{y} + \vec{y}^2$, что означает, что $|\vec{x}-\vec{y}| = |\vec{x}+\vec{y}|$. Вспоминая, что такое $\vec{x}$ и $\vec{y}$, получаем $|\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}| = |\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}-\vec{d}|$. Аналогично можно получить, что эти модули равны также и $|\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}|$, что и требовалось доказать.

3. (3 балла) Найдите расстояние между кривыми $y = e^{3x+7}$ и $y = (\ln x - 7)/3$.

Решение: Расстояние между графиками функций равно расстоянию между их ближайшими точками. Заметим, что функции, между графиками которых требуется найти расстояние, являются обратными друг к другу, а их графики симметричны относительно прямой $y = x$ и, кроме того, находятся по разные стороны от неё.

Если мы найдём на графике функции $y = e^{3x+7}$ точку A, ближайшую к прямой $y = x$, то точка A', симметричная ей, очевидно, будет ближайшей к этой прямой на графике функции

$y = (\ln x - 7)/3$. Если провести через эти точки прямые, параллельные прямой $y = x$, графики обеих функций окажутся вне полосы, ограниченной этими прямыми, значит, расстояние между любыми двумя точками на этих графиках не меньше расстояния между этими прямыми. С другой стороны, расстояние между этими прямыми равно расстоянию между точками A и A', значит, AA' и есть искомое расстояние.

Пусть координаты точки A это $(x; e^{3x+7})$, тогда A' имеет координаты $(e^{3x+7}; x)$ и расстояние между ними

$$\rho(x) = \sqrt{(x - e^{3x+7})^2 + (e^{3x+7} - x)^2} = \sqrt{2(e^{3x+7} - x)^2} = \sqrt{2}|e^{3x+7} - x|$$

Рассмотрим функцию $f(x) = e^{3x+7} - x$ и найдем ее минимум с помощью производной: $f'(x) = 3e^{3x+7} - 1$. Приравнивая эту производную к нулю в точке x_0, мы получаем $x_0 = \dfrac{-\ln 3 - 7}{3}$.

Тогда при $x < x_0$ функция $f(x)$ убывает, а при $x > x_0$ — возрастает, следовательно в точке x_0 функция $f(x)$ достигает минимума.

$f(x_0) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{\ln 3 + 7}{3} > 0$, следовательно $f(x) > 0$ при $x \in R$.

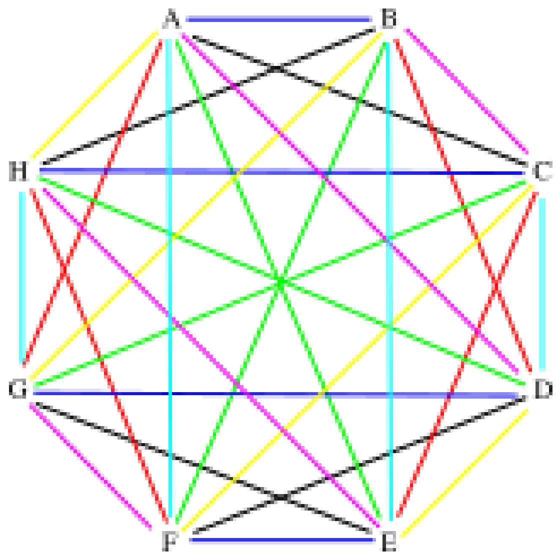
Таким образом, $\rho(x) = \sqrt{2}(e^{3x+7} - x)$.

Заметим, что $\rho(x)$ отличается от $f(x)$ домножением на $\sqrt{2}$, следовательно, минимум функции достигается в той же точке, что и минимум функции $f(x)$. Таким образом, минимальное расстояние равно: $\sqrt{2}\left(\dfrac{8 + \ln 3}{3}\right)$.

4. (3 балла) В некоторой стране 200 городов и 8 авиакомпаний. Каждые два города соединены рейсами одной из восьми авиакомпаний. Можно ли утверждать, что найдётся авиакомпания и больше 50 городов, между любыми двумя из которых можно добраться рейсами этой авиакомпании (возможно, с пересадками)?

Ответ: Нет, это не обязательно верно.

Решение: Построим контрпример. Разобъём города на 8 групп по 25 городов. Назовём эти группы A, B, C, D, E, F, G и H



Внутри каждой группы соединим города рейсами компании номер 1.

Компания номер 2 будет соединять города группы A с городами группы B, C с H, D с G, а E с F.

Компания номер 3 будет соединять города группы A с городами группы D, B с C, E с H, а F с G.

Компания номер 4 будет соединять города группы A с городами группы F, G с H, B с E, а C с D.

Компания номер 5 будет соединять города группы A с городами группы H, B с G, C с F, а E с D.

Компания номер 6 будет соединять города группы A с городами группы E, B с F, C с G, а D с H.

Компания номер 7 будет соединять города группы A с городами группы C, B с H, D с F, а E с G.

Компания номер 8 будет соединять города группы A с городами группы G, F с H, D с B, а E с C.

Таким образом, рейсы компании номер 1 связывают по 25 городов, а рейсы остальных компаний ровно по 50.

Это построение схематично изображено на рисунке. Разные компании обозначены разными цветами.

Данный контрпример, разумеется, не единственный.

5. (3 балла) Найдите все непрерывные на всей числовой оси функции, удовлетворяющие тождеству $5f(x+y) = f(x)f(y)$ и условию $f(1) = 10$.

Ответ: $f(x) = 5 \cdot 2^x$.

Решение:

Вначале докажем, что $f(x) \geqslant 0$. Действительно, $5f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2 \geqslant 0$.

Подставив в условие задачи $x = y = 0$, получаем $5f(0) = f(0) \cdot f(0)$ откуда $f(0) = 0$ или $f(0) = 5$. Если $f(0) = 0$, то $5f(x+0) = f(x)f(0)$, откуда $f(x) = 0$ для любого x, что неверно. Следовательно, $f(0) = 5$.

Подставляя $y = 1$, получаем $5f(x+1) = f(x) \cdot f(1)$, то есть $f(x+1) = 2f(x)$. Отсюда для любого натурального n находим $f(n) = f(0)2^n = 5 \cdot 2^n$.

Также легко по индукции доказать формулу $f(x_1 + x_2 + ... + x_n) = \frac{1}{5^{n-1}} f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_n)$, откуда, в частности, $f(1) = f\left(\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{5^{n-1}}(f(\frac{1}{n}))^n$. Значит, $f\left(\frac{1}{n}\right)^n = 2 \cdot 5^n$, откуда $f\left(\frac{1}{n}\right) = 5 \cdot 2^{\frac{1}{n}}$ для всех натуральных n.

Отсюда $f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{5^{m-1}}(f(\frac{1}{n}))^m = \frac{1}{5^{m-1}} 5^m \cdot 2^{\frac{m}{n}} = 5 \cdot 2^{\frac{m}{n}}$ для натуральных m и n.

Теперь разберёмся с отрицательными дробями: $5f(0) = 5f\left(\frac{m}{n} - \frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{m}{n}\right) f\left(-\frac{m}{n}\right)$, откуда $f\left(-\frac{m}{n}\right) = 5 \cdot 2^{-\frac{m}{n}}$.

Таким образом, функция $f(x) = 5 \cdot 2^x$ для всех рациональных чисел. Функция в правой части равенства также непрерывна, а если две функции совпадают для всех рациональных чисел, то они совпадают на всей вещественной оси.

6. (3 балла) Пусть x, y, z и t — неотрицательные числа, такие что $x+y+z+t = 4$. Докажите неравенство

$$\sqrt{x^2+t^2} + \sqrt{z^2+1} + \sqrt{z^2+t^2} + \sqrt{y^2+x^2} + \sqrt{y^2+64} \geqslant 13.$$

Решение:

Рассмотрим на плоскости следующие точки: $A(0,0)$; $B(x,t)$; $C(x+z, t+1)$; $D(x+z+t, t+1+z)$; $E(x+z+t+y, t+1+z+x)$; $F(x+z+t+y+8, t+1+z+x+y)$. Тогда длина ломаной $ABCDEF$ совпадает с выражением, которое требуется оценить. По неравенству треугольника длина ломаной $ABCDEF$ не меньше длины отрезка AF. С учетом того, что $x+y+z+t = 4$, координаты точки F это $(12, 5)$ а длина отрезка $AF = 13$.

7. (4 балла) Решите уравнение:

$$\sin x + \sin 3x + \ldots + \sin 2013x = \cos x + \cos 3x + \ldots + \cos 2013x.$$

Ответ:

1) $x = \dfrac{\pi k}{1007}$, $k \in \mathbb{Z}$, k не делится на 1007.

2) $x = \dfrac{\pi + 4\pi k}{4028}, k \in \mathbb{Z}$.

Решение:

Докажем сначала следующие формулы по индукции в случае, если $\sin x \neq 0$:

$$\sum_{k=1}^{n} \sin((2k-1)x) = \frac{\sin^2(nx)}{\sin x}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \cos((2k-1)x) = \frac{\sin(2nx)}{2\sin x} = \frac{\sin(nx)\cos(nx)}{\sin x}$$

Первая формула. База $n = 1$: $\sin x = \dfrac{\sin^2 x}{\sin x}$ — верное утверждение.

Переход: предположим, что утверждение верно для некоторого n, докажем, что оно верно и для $n+1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \sin((2k-1)x) = \sum_{k=1}^{n} \sin((2k-1)x) + \sin((2n+1)x) = \frac{\sin^2(nx)}{\sin x} + \sin((2n+1)x) =$$

$$= \frac{\sin^2(nx) + \sin(2nx + x)\sin x}{\sin x} = \frac{\sin^2(nx) + \sin(2nx)\cos x \sin x + \cos(2nx)\sin^2 x}{\sin x} =$$

$$= \frac{\sin^2(nx) + 2\sin(nx)\cos(nx)\cos x \sin x + (\cos^2(nx) - \sin^2(nx))\sin^2 x}{\sin x} =$$

$$= \frac{\sin^2(nx)\cos^2 x + 2\sin(nx)\cos(nx)\cos x \sin x + \cos^2(nx)\sin^2 x}{\sin x} =$$

$$= \frac{(\sin(nx)\cos(x) + \cos nx \sin x)^2}{\sin x} = \frac{\sin^2((n+1)x)}{\sin x}.$$

Вторая формула. База $n = 1$: $\cos x = \dfrac{\sin 2x}{2\sin x}$ — верное утверждение.

Переход: предположим, что утверждение верно для некоторого n, докажем, что оно верно и для $n+1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \cos((2k-1)x) = \sum_{k=1}^{n} \cos((2k-1)x) + \cos((2n+1)x) = \frac{\sin(2nx)}{2\sin x} + \cos((2n+1)x) =$$

$$= \frac{\sin(2nx) + 2\cos(2nx + x)\sin x}{2\sin x} = \frac{\sin(2nx) + 2\cos(2nx)\cos x \sin x - 2\sin(2nx)\sin^2 x}{2\sin x} =$$

$$= \frac{\sin(2nx)(1 - 2\sin^2 x) + \cos(2nx)\sin 2x}{2\sin x} = \frac{\sin(2nx)\cos(2x) + \cos(2nx)\sin 2x}{2\sin x} = \frac{\sin(2(n+1)x)}{2\sin x}.$$

Разберём сначала случай $\sin x = 0$. В этом случае левая часть уравнения превращается в 0, а правая это 1007 или -1007, то есть числа $x = \pi k$ при целых k не являются решениями задачи.

Воспользовавшись доказанными выше формулами, превратим исходное уравнение в $\dfrac{\sin^2 1007x}{\sin x} = \dfrac{\sin 1007x \cos 1007x}{\sin x}$, откуда $\sin 1007x = 0$ или $\sin 1007x = \cos 1007x$.

В первом случае получаем $1007x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$, откуда $x = \dfrac{\pi k}{1007}, k \in \mathbb{Z}$. При этом, так как $\sin x \neq 0$, число k не делится на 1007.

Во втором случае получаем $1007x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, откуда $x = \dfrac{\pi + 4\pi k}{4028}, k \in \mathbb{Z}$. Для таких чисел $\sin x \neq 0$, поэтому из этого множества решений никакие числа исключать не приходится.

8. (4 балла) С числом, записанным на доске, разрешается делать следующую операцию: стирать две соседние цифры, сумма которых не превосходит 9, и записывать эту сумму на их место. Изначально было написано 300-значное число $12251225\ldots1225$. С числом на доске проделывали указанную операцию до тех пор, пока это не стало невозможно. Какое наибольшее число могло оказаться на доске в результате?

Ответ:

$55\ldots55$ — 150-значное число.

Решение:

Сумма цифр исходного числа $(1+2+2+5)\cdot 75 = 750$. Сумма цифр конечного числа такая же.

Разобъём цифры конечного числа на пары: первую со второй, третью с четвёртой, и т.д. Последняя цифра может остаться без пары. В каждой паре сумма цифр не меньше десяти, откуда в числе не может быть больше 150 цифр. Поскольку 150-значные числа превосходят все числа с меньшим количеством знаков, ответ в первую очередь стоит искать среди них.

Если в числе ровно 150 цифр, и сумма цифр в какой-то паре больше 10, то общая сумма цифр больше 750. Значит, в каждом 150-значном числе, которое может у нас получиться, сумма цифр в каждой паре ровно 10.

Обратите внимание: утверждение о том, что в каждом таком числе сумма соседних цифр равна 10 вообще говоря, неверно: может получиться, например, число $375555\ldots 55$, в котором это условие нарушается.

В каждой паре нам необходимо максимизировать первую цифру и минимизировать вторую. Поскольку каждая пара цифр получается указанными в условии операциями из 1225, вторая цифра не меньше 5 и наибольший вариант для каждой пары это 55, откуда мы получаем ответ.

Открытая олимпиада школьников по математике

11 марта 2018 г.

11 класс

3 вариант

1. (2 балла) В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 20$ и $BC = 14$ окружности, построенные на сторонах AB, BC и CD как на диаметрах, пересекаются в одной точке. Длина диагонали AC равна 16. Найдите длину BD.

Ответ: Ответ: 30

Решение:

Обозначим точку пересечения трех окружностей за O. Тогда так как окружности построены на сторонах трапеции AB, BC и CD как на диаметрах, то углы $\angle AOB$, $\angle BOC$ и $\angle COD$ — прямые, следовательно, точки A, O, C лежат на одной прямой и точки B, O, D лежат на одной прямой, то есть O — точка пересечения диагоналей трапеции.

Обозначим середины сторон AB, BC и CD за K, L и M соответственно. Так как KL и LM — средние линии в треугольниках ABC и BCD, $KL \parallel AC$ и $LM \parallel BD$. Значит, $KL \perp LM$, то есть треугольник KLM — прямоугольный. Кроме того, $KL = \dfrac{AC}{2} = 8$, а $KM = \dfrac{AD+BC}{2} = 17$, значит, по теореме Пифагора, $LM = 15$. Отсюда $BD = 2LM = 30$.

Вместо рассуждений со средними линиями можно рассмотреть треугольники BOC и AOD, которые подобны с коэффициентом $14 : 20 = 7 : 10$. Так как $AC = 16$, то $OC = \dfrac{7}{17}AC = \dfrac{112}{17}$. По теореме Пифагора в треугольнике BOC находим $OB = \sqrt{14^2 - \dfrac{112^2}{17^2}} = \dfrac{210}{17}$. Отсюда $BD = \dfrac{17}{7}OB = \dfrac{17}{7} \cdot \dfrac{210}{17} = 30$.

2. (3 балла) В некотором тетраэдре отметили основания и середины всех четырёх его медиан. Каждое основание медианы тетраэдра соединили с серединами трёх остальных. Получившийся многогранник оказался прямоугольным параллелепипедом. Докажите, что исходный тетраэд — равногранный.

Обозначим радиус-векторы вершин тетраэдра за $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$. Тогда основания медиан задаются формулой $\dfrac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$ и аналогичными ей, а середины медиан формулой $\dfrac{\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}+\vec{d}}{2} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+3\vec{d}}{6}$ и аналогичными ей.

Вычитая один радиус-вектор из другого, получаем векторы рёбер получившегося многогранника $\dfrac{\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}}{6}$ и аналогичные ему. При этом каждый такой вектор мы получаем два раза, т.е. всего 6 различных векторов. Кроме того, вместо с вектором $\dfrac{\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}}{6}$ мы также получаем и противоположный ему вектор $\dfrac{-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-\vec{d}}{6}$, который ему коллинеарен. Таким образом, кстати, мы доказали, что наш многогранник параллелепипед в любом тетраэдре.

Умножив длины всех векторов на 6, мы получаем, что условие задачи эквивалентно взаимной перпендикулярности трёх векторов: $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}$, $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}-\vec{d}$ и $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}-\vec{d}$. Рассмотрим первые два вектора. Введём дополнительные обозначения $\vec{a}-\vec{c} = \vec{x}$ и $\vec{b}-\vec{d} = \vec{y}$. Тогда мы знаем, что $\vec{x}-\vec{y} \perp \vec{x}+\vec{y}$, то есть, что скалярное произведение этих векторов равно 0. Их скалярное произведение это $\vec{x}^2-\vec{y}^2$, а равенство его нулю равносильно равенству $\vec{x}^2$ и $\vec{y}^2$, то есть равенству длин $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Это значит, что два противоположных ребра тетраэдра равны. Аналогично мы получаем равенство остальных пар противоположных ребёр, следовательно, тетраэдр действительно равногранный.

3. (3 балла) Найдите расстояние между кривыми $y = e^{5x+7}$ и $y = (\ln x - 7)/5$.

Решение: Расстояние между графиками функций равно расстоянию между их ближайшими точками. Заметим, что функции, между графиками которых требуется найти расстояние, являются обратными друг к другу, а их графики симметричны относительно прямой $y =$ 13 x и, кроме того, находятся по разные стороны от неё.

Если мы найдём на графике функции $y = e^{5x+7}$ точку A, ближайшую к прямой $y = x$, то точка A', симметричная ей, очевидно, будет ближайшей к этой прямой на графике функции $y = (\ln x - 7)/5$. Если провести через эти точки прямые, параллельные прямой $y = x$, графики обеих функций окажутся вне полосы, ограниченной этими прямыми, значит, расстояние между любыми двумя точками на этих графиках не меньше расстояния между этими прямыми. С другой стороны, расстояние между этими прямыми равно расстоянию между точками A и A', значит, AA' и есть искомое расстояние.

Пусть координаты точки A это $(x; e^{5x+7})$, тогда A' имеет координаты $(e^{5x+7}; x)$ и расстояние между ними

$$\rho(x) = \sqrt{(x - e^{5x+7})^2 + (e^{5x+7} - x)^2} = \sqrt{2(e^{5x+7} - x)^2} = \sqrt{2}|e^{5x+7} - x|$$

Рассмотрим функцию $f(x) = e^{5x+7} - x$ и найдем ее минимум с помощью производной: $f'(x) = 5e^{5x+7} - 1$. Приравнивая эту производную к нулю в точке x_0, мы получаем $x_0 = \dfrac{-\ln 5 - 7}{5}$.

Тогда при $x < x_0$ функция $f(x)$ убывает, а при $x > x_0$ — возрастает, следовательно в точке x_0 функция $f(x)$ достигает минимума.

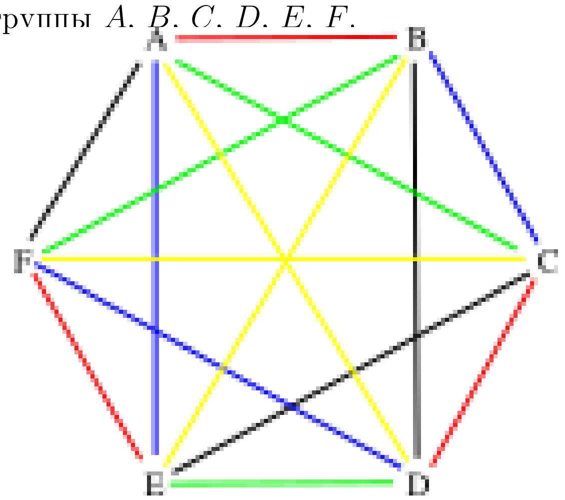
$f(x_0) = \dfrac{1}{5} + \dfrac{\ln 5 + 7}{5} > 0$, следовательно $f(x) > 0$ при $x \in R$.

Таким образом, $\rho(x) = \sqrt{2}(e^{5x+7} - x)$.

Заметим, что $\rho(x)$ отличается от $f(x)$ домножением на $\sqrt{2}$, следовательно, минимум функции достигается в той же точке, что и минимум функции $f(x)$. Таким образом, минимальное расстояние равно: $\sqrt{2}\left(\dfrac{8 + \ln 5}{5}\right)$.

4. (3 балла) В некоторой стране 600 городов и 6 авиакомпаний. Каждые два города соединены рейсами одной из шести авиакомпаний. Можно ли утверждать, что найдётся авиакомпания и больше 200 городов, между любыми двумя из которых можно добраться рейсами этой авиакомпании (возможно, с пересадками)?

Решение: Построим контрпример. Разобъём города на 6 групп по 100 городов. Назовём эти группы A, B, C, D, E, F.



Внутри каждой группы соединим города рейсами компании номер 1.

Компания номер 2 будет соединять города группы A с городами группы B, C с D, а E с F.

Компания номер 3 будет соединять города группы A с городами группы D, B с E, а C с F.

Компания номер 4 будет соединять города группы A с городами группы C, B с F, а D с E.

Компания номер 5 будет соединять города группы A с городами группы E, B с C, а D с F.

Компания номер 6 будет соединять города группы A с городами группы F, B с D, а C с E.

Таким образом, рейсы компании номер 1 связывают по 100 городов, а рейсы остальных компаний ровно по 200.

Это построение схематично изображено на рисунке. Разные компании обозначены разными цветами.

Данный контрпример, разумеется, не единственный.

5. (3 балла) Найдите все непрерывные на всей числовой оси функции, удовлетворяющие тождеству $3f(x + y) = f(x)f(y)$ и условию $f(1) = 12$.

Ответ: $f(x) = 3 \cdot 4^x$.

Решение:

Вначале докажем, что $f(x) \geqslant 0$. Действительно, $3f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2 \geqslant 0$.

Подставив в условие задачи $x = y = 0$, получаем $3f(0) = f(0) \cdot f(0)$ откуда $f(0) = 0$ или $f(0) = 3$. Если $f(0) = 0$, то $3f(x+0) = f(x)f(0)$, откуда $f(x) = 0$ для любого x, что неверно. Следовательно, $f(0) = 3$.

Подставляя $y = 1$, получаем $3f(x+1) = f(x) \cdot f(1)$, то есть $f(x+1) = 4f(x)$. Отсюда для любого натурального n находим $f(n) = f(0)4^n = 3 \cdot 4^n$.

Также легко по индукции доказать формулу $f(x_1 + x_2 + ... + x_n) = \frac{1}{3^{n-1}} f(x_1)f(x_2)\dots f(x_n)$, откуда, в частности, $f(1) = f\left(\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3^{n-1}}(f(\frac{1}{n}))^n$. Значит, $f\left(\frac{1}{n}\right)^n = 4 \cdot 3^n$, откуда $f\left(\frac{1}{n}\right) = 3 \cdot 4^{\frac{1}{n}}$ для всех натуральных n.

Отсюда $f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3^{m-1}}(f(\frac{1}{n}))^m = \frac{1}{3^{m-1}} 3^m \cdot 4^{\frac{m}{n}} = 3 \cdot 4^{\frac{m}{n}}$ для натуральных m и n.

Теперь разберёмся с отрицательными дробями: $3f(0) = 3f\left(\frac{m}{n} - \frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{m}{n}\right) f\left(-\frac{m}{n}\right)$, откуда $f\left(-\frac{m}{n}\right) = 3 \cdot 4^{-\frac{m}{n}}$.

Таким образом, функция $f(x) = 3 \cdot 4^x$ для всех рациональных чисел. Функция в правой части равенства также непрерывна, а если две функции совпадают для всех рациональных чисел, то они совпадают на всей вещественной оси.

6. (3 балла) Пусть x, y, z и t — неотрицательные числа, такие что $x+y+z+t = 7$. Докажите неравенство

$$\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+1} + \sqrt{z^2+y^2} + \sqrt{t^2+64} + \sqrt{z^2+t^2} \geqslant 17.$$

Решение:

Рассмотрим на плоскости следующие точки: $A(0,0)$; $B(x,y)$; $C(x+1, y+x)$; $D(x+1+y, y+x+z)$; $E(x+1+y+t, y+x+z+8)$; $F(x+1+y+t+z, y+x+z+8+t)$. Тогда длина ломаной $ABCDEF$ совпадает с выражением, которое требуется оценить. По неравенству треугольника длина ломаной $ABCDEF$ не меньше длины отрезка AF. С учетом того, что $x+y+z+t = 7$, координаты точки F это $(8, 15)$ а длина отрезка $AF = 17$.

7. (4 балла) Решите уравнение:

$$\sin x + \sin 3x + \ldots + \sin 2019x = \cos x + \cos 3x + \ldots + \cos 2019x.$$

Ответ:

1) $x = \dfrac{\pi k}{1010}$, $k \in \mathbb{Z}$, k не делится на 1010.

2) $x = \dfrac{\pi + 4\pi k}{4040}, k \in \mathbb{Z}$.

Решение:

Докажем сначала следующие формулы по индукции в случае, если $\sin x \neq 0$:

$$\sum_{k=1}^{n} \sin((2k-1)x) = \frac{\sin^2(nx)}{\sin x}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \cos((2k-1)x) = \frac{\sin(2nx)}{2\sin x} = \frac{\sin(nx)\cos(nx)}{\sin x}$$

Первая формула. База $n = 1$: $\sin x = \dfrac{\sin^2 x}{\sin x}$ — верное утверждение.

Переход: предположим, что утверждение верно для некоторого n, докажем, что оно верно и для $n+1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \sin((2k-1)x) = \sum_{k=1}^{n} \sin((2k-1)x) + \sin((2n+1)x) = \frac{\sin^2(nx)}{\sin x} + \sin((2n+1)x) =$$

$$= \frac{\sin^2(nx) + \sin(2nx+x)\sin x}{\sin x} = \frac{\sin^2(nx) + \sin(2nx)\cos x \sin x + \cos(2nx)\sin^2 x}{\sin x} =$$

$$= \frac{\sin^2(nx) + 2\sin(nx)\cos(nx)\cos x\sin x + (\cos^2(nx) - \sin^2(nx))\sin^2 x}{\sin x} =$$

$$= \frac{\sin^2(nx)\cos^2 x + 2\sin(nx)\cos(nx)\cos x\sin x + \cos^2(nx)\sin^2 x}{\sin x} =$$

$$= \frac{(\sin(nx)\cos(x) + \cos nx\sin x)^2}{\sin x} = \frac{\sin^2((n+1)x)}{\sin x}.$$

Вторая формула. База $n = 1$: $\cos x = \dfrac{\sin 2x}{2\sin x}$ — верное утверждение.

Переход: предположим, что утверждение верно для некоторого n, докажем, что оно верно и для $n + 1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1}\cos((2k-1)x) = \sum_{k=1}^{n}\cos((2k-1)x) + \cos((2n+1)x) = \frac{\sin(2nx)}{2\sin x} + \cos((2n+1)x) =$$

$$= \frac{\sin(2nx) + 2\cos(2nx + x)\sin x}{2\sin x} = \frac{\sin(2nx) + 2\cos(2nx)\cos x\sin x - 2\sin(2nx)\sin^2 x}{2\sin x} =$$

$$= \frac{\sin(2nx)(1 - 2\sin^2 x) + \cos(2nx)\sin 2x}{2\sin x} = \frac{\sin(2nx)\cos(2x) + \cos(2nx)\sin 2x}{2\sin x} = \frac{\sin(2(n+1)x)}{2\sin x}.$$

Разберём сначала случай $\sin x = 0$. В этом случае левая часть уравнения превращается в 0, а правая это 1010 или -1010, то есть числа $x = \pi k$ при целых k не являются решениями задачи.

Воспользовавшись доказанными выше формулами, превратим исходное уравнение в $\dfrac{\sin^2 1010x}{\sin x} = \dfrac{\sin 1010x\cos 1010x}{\sin x}$, откуда $\sin 1010x = 0$ или $\sin 1010x = \cos 1010x$.

В первом случае получаем $1010x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$, откуда $x = \dfrac{\pi k}{1010}, k \in \mathbb{Z}$. При этом, так как $\sin x \neq 0$, число k не делится на 1010.

Во втором случае получаем $1010x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, откуда $x = \dfrac{\pi + 4\pi k}{4040}, k \in \mathbb{Z}$. Для таких чисел $\sin x \neq 0$, поэтому из этого множества решений никакие числа исключать не приходится.

8. (4 балла) С числом, записанным на доске, разрешается делать следующую операцию: стирать две соседние цифры, сумма которых не превосходит 9, и записывать эту сумму на их место. Изначально было написано 200-значное число $3112331123\ldots31123$. С числом на доске проделывали указанную операцию до тех пор, пока это не стало невозможно. Какое наибольшее число могло оказаться на доске в результате?

Ответ:

$73\ldots73$ — 80-значное число.

Решение:

Сумма цифр исходного числа $(3 + 1 + 1 + 2 + 3)\cdot 40 = 400$. Сумма цифр конечного числа такая же.

Разобъём цифры конечного числа на пары: первую со второй, третью с четвёртой, и т.д. Последняя цифра может остаться без пары. В каждой паре сумма цифр не меньше десяти, откуда в числе не может быть больше 80 цифр. Поскольку 80-значные числа превосходят все числа с меньшим количеством знаков, ответ в первую очередь стоит искать среди них.

Если в числе ровно 80 цифр, и сумма цифр в какой-то паре больше 10, то общая сумма цифр больше 400. Значит, в каждом 80-значном числе, которое может у нас получиться, сумма цифр в каждой паре ровно 10.

Обратите внимание: утверждение о том, что в каждом таком числе сумма соседних цифр равна 10 вообще говоря, неверно: может получиться, например, число $377373\ldots73$, в котором это условие нарушается.

В каждой паре нам необходимо максимизировать первую цифру и минимизировать вторую. Поскольку каждая пара цифр получается указанными в условии операциями из 31123, вторая цифра не меньше 3 и наибольший вариант для каждой пары это 73, откуда мы получаем ответ.

Открытая олимпиада школьников по математике

11 марта 2018 г.

11 класс

4 вариант

1. (2 балла) В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 20$ и $BC = 10$ окружности, построенные на сторонах AB, BC и CD как на диаметрах, пересекаются в одной точке. Длина диагонали AC равна 18. Найдите длину BD.

Ответ: Ответ: 24

Решение:

Обозначим точку пересечения трех окружностей за O. Тогда так как окружности построены на сторонах трапеции AB, BC и CD как на диаметрах, то углы $\angle AOB$, $\angle BOC$ и $\angle COD$ — прямые, следовательно, точки A, O, C лежат на одной прямой и точки B, O, D лежат на одной прямой, то есть O — точка пересечения диагоналей трапеции.

Обозначим середины сторон AB, BC и CD за K, L и M соответственно. Так как KL и LM — средние линии в треугольниках ABC и BCD, $KL \parallel AC$ и $LM \parallel BD$. Значит, $KL \perp LM$, то есть треугольник KLM — прямоугольный. Кроме того, $KL = \dfrac{AC}{2} = 9$, а $KM = \dfrac{AD+BC}{2} = 15$, значит, по теореме Пифагора, $LM = 12$. Отсюда $BD = 2LM = 24$.

Вместо рассуждений со средними линиями можно рассмотреть треугольники BOC и AOD, которые подобны с коэффициентом $10 : 20 = 1 : 2$. Так как $AC = 18$, то $OC = \dfrac{1}{3}AC = 6$. По теореме Пифагора в треугольнике BOC находим $OB = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$. Отсюда $BD = \dfrac{3}{1}OB = 3 \cdot 8 = 24$.

2. (3 балла) В некотором тетраэдре отметили основания и середины всех четырёх его медиан. Каждое основание медианы тетраэдра соединили с серединами трёх остальных. В получившемся многограннике все 12 рёбер оказались равной длины. Докажите, что исходный тетраэдр ортоцентрический.

Решение: Обозначим радиус-векторы вершин тетраэдра за $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$. Тогда основания медиан задаются формулой $\dfrac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$ и аналогичными ей, а середины медиан формулой $\dfrac{\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}+\vec{d}}{2} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+3\vec{d}}{6}$ и аналогичными ей.

Вычитая один радиус-вектор из другого, получаем векторы рёбер получившегося многогранника $\dfrac{\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}}{6}$ и аналогичные ему. При этом каждый такой вектор мы получаем два раза, т.е. всего 6 различных векторов. Кроме того, вместе с вектором $\dfrac{\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}}{6}$ мы также получаем и противоположный ему вектор $\dfrac{-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-\vec{d}}{6}$, который имеет ту же длину.

Домножим все эти векторы на 6. Условие задачи сводиться к следующим равенствам: $|\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}| = |\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}-\vec{d}| = |\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}|$. Введём обозначения $\vec{a}-\vec{c} = \vec{x}$ и $\vec{b}-\vec{d} = \vec{y}$. Тогда равенство первого и второго модулей превратится в $|\vec{x}-\vec{y}| = |\vec{x}+\vec{y}|$. Запишем это равенство в виде скалярных квадратов этих векторов: $\vec{x}^2 - 2\vec{x}\vec{y} + \vec{y}^2 = \vec{x}^2 + 2\vec{x}\vec{y} + \vec{y}^2$, откуда $4\vec{x}\vec{y} = 0$, то есть векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ перпендикулярны, а это векторы, соответствующие двум противоположным рёбрам тетраэдра. Из равенств остальных пар модулей получаем перепендикулярность остальных пар рёбер, а это один из признаков ортоцентрического тетраэдра.

3. (3 балла) Найдите расстояние между кривыми $y = e^{3x+11}$ и $y = (\ln x - 11)/3$.

Решение: Расстояние между графиками функций равно расстоянию между их ближайшими точками. Заметим, что функции, между графиками которых требуется найти расстояние, являются обратными друг к другу, а их графики симметричны относительно прямой $y = x$ и, кроме того, находятся по разные стороны от неё.

Если мы найдём на графике функции $y = e^{3x+11}$ точку A, ближайшую к прямой $y = x$, то точка A', симметричная ей, очевидно, будет ближайшей к этой прямой на графике функции $y = (\ln x - 11)/3$. Если провести через эти точки прямые, параллельные прямой $y = x$, графики обеих функций окажутся вне полосы, ограниченной этими прямыми, значит, расстояние между любыми двумя точками на этих графиках не меньше расстояния между этими прямыми. С другой стороны, расстояние между этими прямыми равно расстоянию между точками A и A', значит, AA' и есть искомое расстояние.

Пусть координаты точки A это $(x; e^{3x+11})$, тогда A' имеет координаты $(e^{3x+11}; x)$ и расстояние между ними

$$\rho(x) = \sqrt{(x - e^{3x+11})^2 + (e^{3x+11} - x)^2} = \sqrt{2(e^{3x+11} - x)^2} = \sqrt{2}|e^{3x+11} - x|$$

Рассмотрим функцию $f(x) = e^{3x+11} - x$ и найдем ее минимум с помощью производной: $f'(x) = 3e^{3x+11} - 1$. Приравнивая эту производную к нулю в точке x_0, мы получаем $x_0 = \dfrac{-\ln 3 - 11}{3}$.

Тогда при $x < x_0$ функция $f(x)$ убывает, а при $x > x_0$ — возрастает, следовательно в точке x_0 функция $f(x)$ достигает минимума.

$f(x_0) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{\ln 3 + 11}{3} > 0$, следовательно $f(x) > 0$ при $x \in R$.

Таким образом, $\rho(x) = \sqrt{2}(e^{3x+11} - x)$.

Заметим, что $\rho(x)$ отличается от $f(x)$ домножением на $\sqrt{2}$, следовательно, минимум функции достигается в той же точке, что и минимум функции $f(x)$. Таким образом, минимальное расстояние равно: $\sqrt{2}\left(4 + \dfrac{\ln 3}{3}\right)$.

4. (3 балла) В некоторой стране 800 городов и 8 авиакомпаний. Каждые два города соединены рейсами одной из восьми авиакомпаний. Можно ли утверждать, что найдётся авиакомпания и больше 200 городов, между любыми двумя из которых можно добраться рейсами этой авиакомпании (возможно, с пересадками)?

Ответ: Нет, это не обязательно верно.

Решение: Построим контрпример. Разобъём города на 8 групп по 100 городов. Назовём эти группы A, B, C, D, E, F, G и H

Внутри каждой группы соединим города рейсами компании номер 1.

Компания номер 2 будет соединять города группы A с городами группы B, C с H, D с G, а E с F.

Компания номер 3 будет соединять города группы A с городами группы D, B с C, E с H, а F с G.

Компания номер 4 будет соединять города группы A с городами группы F, G с H, B с E, а C с D.

Компания номер 5 будет соединять города группы A с городами группы H, B с G, C с F, а E с D.

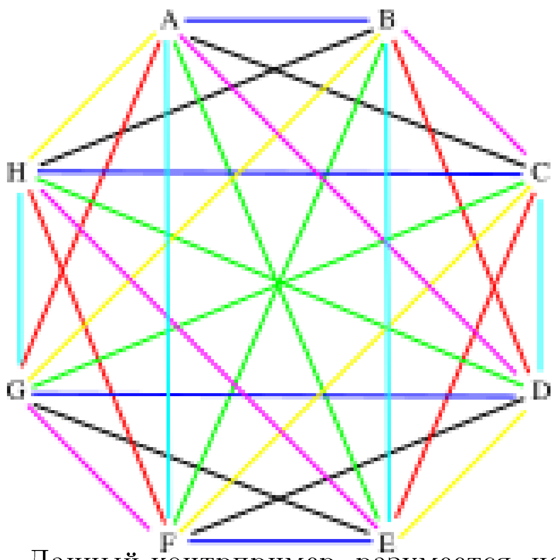
Компания номер 6 будет соединять города группы A с городами группы E, B с F, C с G, а D с H.

Компания номер 7 будет соединять города группы A с городами группы C, B с H, D с F, а E с G.

Компания номер 8 будет соединять города группы A с городами группы G, F с H, D с B, а E с C.

Таким образом, рейсы компании номер 1 связывают по 100 городов, а рейсы остальных компаний ровно по 200.

Это построение схематично изображено на рисунке. Разные компании обозначены разными цветами.



Данный контрпример, разумеется, не единственный.

5. (3 балла) Найдите все непрерывные на всей числовой оси функции, удовлетворяющие тождеству $2f(x+y)=f(x)f(y)$ и условию $f(1)=10$.

Ответ: $f(x)=2\cdot 5^x$.

Решение:

Вначале докажем, что $f(x)\geqslant 0$. Действительно, $2f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)^2\geqslant 0$.

Подставив в условие задачи $x=y=0$, получаем $2f(0)=f(0)\cdot f(0)$ откуда $f(0)=0$ или $f(0)=2$. Если $f(0)=0$, то $2f(x+0)=f(x)f(0)$, откуда $f(x)=0$ для любого x, что неверно. Следовательно, $f(0)=2$.

Подставляя $y=1$, получаем $2f(x+1)=f(x)\cdot f(1)$, то есть $f(x+1)=5f(x)$. Отсюда для любого натурального n находим $f(n)=f(0)5^n=2\cdot 5^n$.

Также легко по индукции доказать формулу $f(x_1+x_2+...+x_n)=\frac{1}{2^{n-1}}f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_n)$, откуда, в частности, $f(1)=f\left(\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2^{n-1}}(f(\frac{1}{n}))^n$. Значит, $f\left(\frac{1}{n}\right)^n=5\cdot 2^n$, откуда $f\left(\frac{1}{n}\right)=2\cdot 5^{\frac{1}{n}}$ для всех натуральных n.

Отсюда $f\left(\frac{m}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2^{m-1}}(f(\frac{1}{n}))^m=\frac{1}{2^{m-1}}2^m\cdot 5^{\frac{m}{n}}=2\cdot 5^{\frac{m}{n}}$ для натуральных m и n.

Теперь разберёмся с отрицательными дробями: $2f(0)=2f\left(\frac{m}{n}-\frac{m}{n}\right)=f\left(\frac{m}{n}\right)f\left(-\frac{m}{n}\right)$, откуда $f\left(-\frac{m}{n}\right)=2\cdot 5^{-\frac{m}{n}}$.

Таким образом, функция $f(x)=2\cdot 5^x$ для всех рациональных чисел. Функция в правой части равенства также непрерывна, а если две функции совпадают для всех рациональных чисел, то они совпадают на всей вещественной оси.

6. (3 балла) Пусть x, y, z и t — неотрицательные числа, такие что $x+y+z+t=2$. Докажите неравенство

$$\sqrt{x^2+z^2}+\sqrt{x^2+1}+\sqrt{z^2+y^2}+\sqrt{y^2+t^2}+\sqrt{t^2+4}\geqslant 5.$$

Решение:

Рассмотрим на плоскости следующие точки: $A(0,0)$; $B(x,z)$; $C(x+1,z+x)$; $D(x+1+z,z+x+y)$; $E(x+1+z+y,z+x+y+t)$; $F(x+1+z+y+t,z+x+y+t+2)$. Тогда длина ломаной $ABCDEF$ совпадает с выражением, которое требуется оценить. По неравенству треугольника длина ломаной $ABCDEF$ не меньше длины отрезка AF. С учетом того, что $x+y+z+t=2$, координаты точки F это $(3,4)$ а длина отрезка $AF=5$.

7. (4 балла) Решите уравнение:

$$\sin x+\sin 3x+\ldots+\sin 2015x=\cos x+\cos 3x+\ldots+\cos 2015x.$$

Ответ:

1) $x=\dfrac{\pi k}{1008}$, $k\in\mathbb{Z}$, k не делится на 1008.

2) $x=\dfrac{\pi+4\pi k}{4032}, k\in\mathbb{Z}$.

Решение:

Докажем сначала следующие формулы по индукции в случае, если $\sin x\neq 0$:

$$\sum_{k=1}^{n}\sin((2k-1)x)=\frac{\sin^2(nx)}{\sin x}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\cos((2k-1)x)=\frac{\sin(2nx)}{2\sin x}=\frac{\sin(nx)\cos(nx)}{\sin x}$$

Первая формула. База $n=1$: $\sin x=\dfrac{\sin^2 x}{\sin x}$ — верное утверждение.

Переход: предположим, что утверждение верно для некоторого n, докажем, что оно верно и для $n+1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1}\sin((2k-1)x)=\sum_{k=1}^{n}\sin((2k-1)x)+\sin\left((2n+1)x\right)=\frac{\sin^2(nx)}{\sin x}+\sin\left((2n+1)x\right)=$$

$$=\frac{\sin^2(nx)+\sin\left(2nx+x\right)\sin x}{\sin x}=\frac{\sin^2(nx)+\sin(2nx)\cos x\sin x+\cos(2nx)\sin^2 x}{\sin x}=$$

$$=\frac{\sin^2(nx)+2\sin(nx)\cos(nx)\cos x\sin x+(\cos^2(nx)-\sin^2(nx))\sin^2 x}{\sin x}=$$

$$=\frac{\sin^2(nx)\cos^2 x+2\sin(nx)\cos(nx)\cos x\sin x+\cos^2(nx)\sin^2 x}{\sin x}=$$

$$=\frac{(\sin(nx)\cos(x)+\cos nx\sin x)^2}{\sin x}=\frac{\sin^2((n+1)x)}{\sin x}.$$

Вторая формула. База $n=1$: $\cos x=\dfrac{\sin 2x}{2\sin x}$ — верное утверждение.

Переход: предположим, что утверждение верно для некоторого n, докажем, что оно верно и для $n+1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1}\cos((2k-1)x)=\sum_{k=1}^{n}\cos((2k-1)x)+\cos\left((2n+1)x\right)=\frac{\sin(2nx)}{2\sin x}+\cos\left((2n+1)x\right)=$$

$$=\frac{\sin(2nx)+2\cos\left(2nx+x\right)\sin x}{2\sin x}=\frac{\sin(2nx)+2\cos(2nx)\cos x\sin x-2\sin(2nx)\sin^2 x}{2\sin x}=$$

$$=\frac{\sin(2nx)(1-2\sin^2 x)+\cos(2nx)\sin 2x}{2\sin x}=\frac{\sin(2nx)\cos(2x)+\cos(2nx)\sin 2x}{2\sin x}=\frac{\sin(2(n+1)x)}{2\sin x}.$$

Разберём сначала случай $\sin x=0$. В этом случае левая часть уравнения превращается в 0, а правая это 1008 или -1008, то есть числа $x=\pi k$ при целых k не являются решениями задачи.

Воспользовавшись доказанными выше формулами, превратим исходное уравнение в $\dfrac{\sin^2 1008x}{\sin x}=\dfrac{\sin 1008x\cos 1008x}{\sin x}$, откуда $\sin 1008x=0$ или $\sin 1008x=\cos 1008x$.

В первом случае получаем $1008x=\pi k, k\in\mathbb{Z}$, откуда $x=\dfrac{\pi k}{1008}, k\in\mathbb{Z}$. При этом, так как $\sin x\neq 0$, число k не делится на 1008.

Во втором случае получаем $1008x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$, откуда $x=\dfrac{\pi+4\pi k}{4032}, k\in\mathbb{Z}$. Для таких чисел $\sin x\neq 0$, поэтому из этого множества решений никакие числа исключать не приходится.

8. (4 балла) С числом, записанным на доске, разрешается делать следующую операцию: стирать две соседние цифры, сумма которых не превосходит 9, и записывать эту сумму на их место. Изначально было написано 100-значное число $21162116\ldots2116$. С числом на доске проделывали указанную операцию до тех пор, пока это не стало невозможно. Какое наибольшее число могло оказаться на доске в результате?

Ответ:

$46\ldots46$ — 50-значное число.

Решение:

Сумма цифр исходного числа $(2+1+1+6)\cdot 25 = 250$. Сумма цифр конечного числа такая же.

Разобъём цифры конечного числа на пары: первую со второй, третью с четвёртой, и т.д. Последняя цифра может остаться без пары. В каждой паре сумма цифр не меньше десяти, откуда в числе не может быть больше 50 цифр. Поскольку 50-значные числа превосходят все числа с меньшим количеством знаков, ответ в первую очередь стоит искать среди них.

Если в числе ровно 50 цифр, и сумма цифр в какой-то паре больше 10, то общая сумма цифр больше 250. Значит, в каждом 50-значном числе, которое может у нас получиться, сумма цифр в каждой паре ровно 10.

Обратите внимание: утверждение о том, что в каждом таком числе сумма соседних цифр равна 10 вообще говоря, неверно: может получиться, например, число $374646\ldots46$, в котором это условие нарушается.

В каждой паре нам необходимо максимизировать первую цифру и минимизировать вторую. Поскольку каждая пара цифр получается указанными в условии операциями из 2116, вторая цифра не меньше 6 и наибольший вариант для каждой пары это 46, откуда мы получаем ответ.