

2. Правильный икосаэдр (20-гранник с 12 вершинами) вписан в сферу радиуса 1. Из одной из вершин икосаэдра провели векторы ко всем остальным и посчитали скалярные произведения для каждой пары различных векторов, всего 55 штук. Чему равна сумма этих скалярных произведений?

Ответ: 60

3. Куб описан вокруг сферы радиуса 1. Из одного из центров граней куба проведены векторы ко всем остальным центрам граней и вершинам. У получившихся векторов посчитали скалярные произведения для каждой пары различных векторов, всего 78 штук. Чему равна сумма этих скалярных произведений?

Ответ: 76

### 10 класс

#### Задача 1. (2 балла)

1. Для функции  $f(x)$  выполняется условие  $f(f(f(x))) + 2 f(f(x)) + 4 f(x) + 8x = 0$ . Найдите  $f(f(f(f(3))))$ .

Ответ: 48

3. Для функции  $f(x)$  выполняется условие  $f(f(f(x))) - 2 f(f(x)) + 4 f(x) - 8x = 0$ . Найдите  $f(f(f(f(5))))$ .

Ответ: 80

3. Для функции  $f(x)$  выполняется условие  $f(f(f(x))) + 3 f(f(x)) + 9 f(x) + 27x = 0$ . Найдите  $f(f(f(f(2))))$ .

Ответ: 162

#### Примеры записи ответов:

14

1/4

-0,25

#### Задача 2. (2 балла)

1. В квадратном трёхчлене поменяли местами первый и второй коэффициенты, после чего результат сложили с исходным трёхчленом. Получился третий квадратный трёхчлен, у которого оказался единственный корень. Чему он может быть равен? Если правильных ответов несколько, перечислите их через запятую или точку с запятой.

Ответ:  $-1/2$  ||  $-0,5$

2. В квадратном трёхчлене поменяли местами первый коэффициент и свободный член, после чего результат сложили с исходным трёхчленом. Получился третий квадратный трёхчлен, у которого оказался единственный корень. Чему он может быть равен? Если правильных

ответов несколько, перечислите их через запятую или точку с запятой.

Ответ: -1, 1 || 1, -1 || 1; -1 || -1; 1

3. В квадратном трёхчлене поменяли местами второй коэффициент и свободный член, после чего результат сложили с исходным трёхчленом. Получился третий квадратный трёхчлен, у которого оказался единственный корень. Чему он может быть равен? Если правильных ответов несколько, перечислите их через точку с запятой.

Ответ: 0; -2 || 0, -2 || -2; 0

**Примеры записи ответов:**

14

1/4

0,25; 0,5

**Задача 3. (2 балла)**

1. Найдите количество решений в натуральных числах уравнения  $(x - 10)^2 - 15 = (y - 6)^2$ .

Ответ: 6

2. Найдите количество решений в натуральных числах уравнения  $(x - 6)^2 - 21 = (y - 3)^2$ .

Ответ: 5

3. Найдите количество решений в натуральных числах уравнения  $(x - 4)^2 - 35 = (y - 3)^2$ .

Ответ: 3

**Примеры записи ответов:**

14

**Задача 4. (3 балла)**

1. Дан параллелограмм ABCD со стороной AD=100. Окружность  $S_1$  касается сторон AD и BC, а также стороны AB; окружность  $S_2$  касается сторон AD и BC, а также окружности  $S_1$ , окружность  $S_3$  касается сторон AD и BC, а также окружности  $S_2$ , и так далее, окружность  $S_{100}$  касается сторон AD и BC, окружности  $S_{99}$ , а также стороны CD.

Какое наибольшее значение может принимать площадь параллелограмма?

Ответ: 100

2. Дан параллелограмм ABCD со стороной AD=150. Окружность  $S_1$  касается сторон AD и BC, а также стороны AB; окружность  $S_2$  касается сторон AD и BC, а также окружности  $S_1$ , окружность  $S_3$  касается сторон AD и BC, а также окружности  $S_2$ , и так далее, окружность  $S_{50}$  касается сторон AD и BC, окружности  $S_{49}$ , а также стороны CD.

Какое наибольшее значение может принимать площадь параллелограмма?

Ответ: 450

3. Дан параллелограмм ABCD со стороной AD=100. Окружность  $S_1$  касается сторон AD и BC, а также стороны AB; окружность  $S_2$  касается сторон AD и BC, а также окружности  $S_1$ , окружность  $S_3$  касается сторон AD и BC, а также окружности  $S_2$ , и так далее, окружность  $S_{200}$  касается сторон AD и BC, окружности  $S_{199}$ , а также стороны CD.

Какое наибольшее значение может принимать площадь параллелограмма?

Ответ: 50

**Примеры записи ответов:**

14

1/4

0,25

**Задача 5. (3 балла)**

1.  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_9} = 2$ . Натуральные числа  $x_1, x_2, \dots, x_9$  таковы, что значения может принимать сумма этих чисел? . Какое минимальное

Ответ: 41

2.  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{11}} = 2$ . Натуральные числа  $x_1, x_2, \dots, x_{11}$  таковы, что значения может принимать сумма этих чисел? . Какое минимальное

Ответ: 61

3.  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{13}} = 2$ . Натуральные числа  $x_1, x_2, \dots, x_{13}$  таковы, что значения может принимать сумма этих чисел? . Какое минимальное

Ответ: 85

**Примеры записи ответов:**

14

**Задача 6. (3 балла)**

1. На доске записаны числа от 1 до 1000. За один ход разрешается стереть какое-либо число  $n$ , а также ещё не более  $n$  чисел не меньших  $n$ . За какое наименьшее количество ходов можно стереть все числа?

Ответ: 9

1. На доске записаны числа от 1 до 500. За один ход разрешается стереть какое-либо число  $n$ ,

а также ещё не более  $n$  чисел не меньших  $n$ . За какое наименьшее количество ходов можно стереть все числа?

Ответ: 8

1. На доске записаны числа от 1 до 2000. За один ход разрешается стереть какое-либо число  $n$ , а также ещё не более  $n$  чисел не меньших  $n$ . За какое наименьшее количество ходов можно стереть все числа?

Ответ: 10

**Примеры записи ответов:**

5

**Задача 7. (4 балла)**

1. Последовательность  $a_n$  построена следующим образом:  $a_0 = 4$ ,  $a_{2n+1} = a_{2n} - 3$ ,  $a_{2n} = -2a_{2n-1}$ .  
Найдите  $a_{100}$ .

Если для записи ответа потребуется операция возведения в степень, используйте символ «^»

Ответ:  $2^{51}+2$  || 2251799813685250

2. Последовательность  $a_n$  построена следующим образом:  $a_0 = 12$ ,  $a_{2n+1} = a_{2n} - 2$ ,  $a_{2n} = 3a_{2n-1}$ .  
Найдите  $a_{50}$ .

Если для записи ответа потребуется операция возведения в степень, используйте символ «^»

Ответ:  $3^{27}+3$  || 7625597484990

3. Последовательность  $a_n$  построена следующим образом:  $a_0 = 10$ ,  $a_{2n+1} = a_{2n} - 4$ ,  $a_{2n} = 2a_{2n-1}$ .  
Найдите  $a_{101}$ .

Если для записи ответа потребуется операция возведения в степень, используйте символ «^»

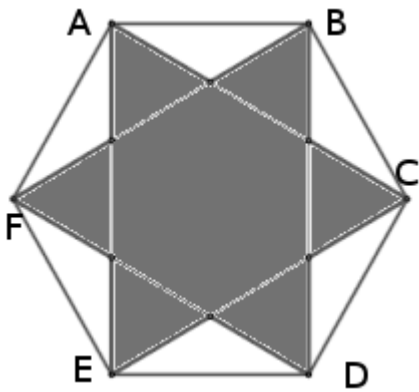
Ответ:  $2^{51}+8$  || 2251799813685256

**Примеры записи ответов:**

14000

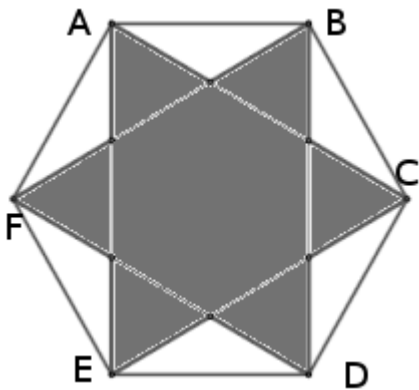
$3^{100} - 7$

1. Дан выпуклый шестиугольник ABCDEF, такой, что  $AB \parallel CF \parallel DE$ ,  $BC \parallel AD \parallel EF$ ,  $CD \parallel BE \parallel FA$  и  $AB = DE = 13$ ,  $BC = EF = 11$ ,  $AC = 20$ . Найдите площадь объединения треугольников ACE и BDF.



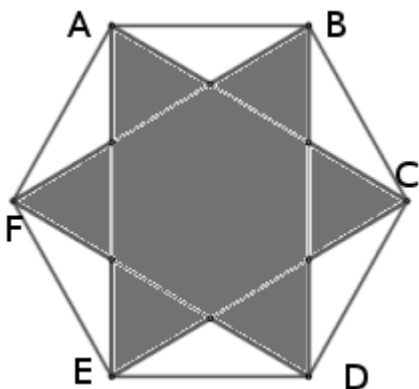
Ответ: 264

2. Дан выпуклый шестиугольник  $ABCDEF$ , такой, что  $AB \parallel CF \parallel DE$ ,  $BC \parallel AD \parallel EF$  и  $CD \parallel BE \parallel FA$  и  $BC = EF = 20$ ,  $CD = AF = 19$ ,  $BD = 37$ . Найдите площадь объединения треугольников  $ACE$  и  $BDF$ .



Ответ: 456

3. Дан выпуклый шестиугольник  $ABCDEF$ , такой, что  $AB \parallel CF \parallel DE$ ,  $BC \parallel AD \parallel EF$  и  $CD \parallel BE \parallel FA$  и  $AB = DE = CD = AF = 13$ ,  $BD = 24$ . Найдите площадь объединения треугольников  $ACE$  и  $BDF$ .



Ответ: 240

**Примеры записи ответов:**

14  
 $\frac{1}{4}$   
 0,25

### Задача 9. (4 балла)

1. В волшебной стране некоторые города соединены дорогами так, что из любого города можно попасть в любой другой город, возможно через какие-то ещё города. Никакие два города не соединены напрямую более чем одной дорогой.

Назовем дорогу особенной, если при ее закрытии из какого-то города нельзя будет доехать до какого-то другого. Известно, что в стране всего дорог 25, из которых 20 дорог особенные. Сколько городов может быть в стране? Если правильных ответов несколько, перечислите их через запятую или точку с запятой.

Ответ: 24, 25 || 25, 24 || 24; 25 || 25; 24

2. В сказочной стране некоторые города соединены дорогами так, что из любого города можно попасть в любой другой город, возможно через какие-то ещё города. Никакие два города не соединены напрямую более чем одной дорогой.

Назовем дорогу удивительной, если при ее закрытии из какого-то города нельзя будет доехать до какого-то другого. Известно, что в стране всего дорог 30, из которых 25 дорог удивительные. Сколько городов может быть в стране? Если правильных ответов несколько, перечислите их через запятую или точку с запятой.

Ответ: 29, 30 || 30, 29 || 29; 30 || 30; 29

3. В Стране Чудес некоторые города соединены дорогами так, что из любого города можно попасть в любой другой город, возможно через какие-то ещё города. Никакие два города не соединены напрямую более чем одной дорогой.

Назовем дорогу странной, если при ее закрытии из какого-то города нельзя будет доехать до какого-то другого. Известно, что в стране всего дорог 50, из которых 45 дорог странные. Сколько городов может быть в стране? Если правильных ответов несколько, перечислите их через запятую или точку с запятой.

Ответ: 49, 50 || 50, 49 || 49; 50 || 50; 49

### Примеры записи ответов:

14

14, 15

14; 15

### Задача 10. (4 балла)

1. На клетчатой доске  $6 \times 6$  стоят фишки. Оказалось, что для каждого числа  $n$  от 0 до 7 есть фишка, в одном столбце и в одной строке с которой стоят в сумме ровно  $n$  фишек (не считая её самой). Какое максимальное количество фишек может стоять на доске?

Ответ: 14

2. На клетчатой доске  $6 \times 6$  стоят фишки. Оказалось, что для каждого числа  $n$  от 1 до 9 есть фишка, в одном столбце и в одной строке с которой стоят в сумме ровно  $n$  фишек (не считая её самой). Какое максимальное количество фишек может стоять на доске?

Ответ: 18

3. На клетчатой доске  $6 \times 6$  стоят фишки. Оказалось, что для каждого числа  $n$  от 2 до 10 есть фишка, в одном столбце и в одной строке с которой стоят в сумме ровно  $n$  фишек (не считая

её самой). Какое максимальное количество фишек может стоять на доске?

Ответ: 21

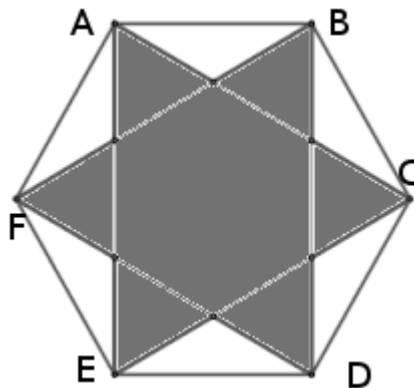
**Примеры записи ответов:**

14

**9 класс.**

**Задача 1. (2 балла)**

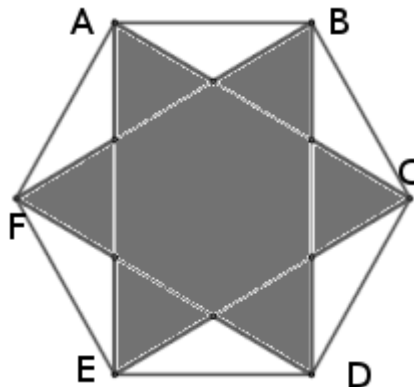
1. Дан правильный шестиугольник ABCDEF, со стороной  $2\sqrt[4]{75}$ . Найдите площадь



объединения треугольников ACE и BDF.

Ответ: 60

2. Дан правильный шестиугольник ABCDEF, со стороной  $5\sqrt[4]{12}$ . Найдите площадь



объединения треугольников ACE и BDF.

Ответ: 150

3. Дан правильный шестиугольник ABCDEF, со стороной  $10\sqrt[4]{27}$ . Найдите площадь