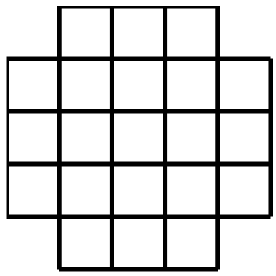
8 класс
1 вариант

1. (2 балла) Сколькими способами можно разбить изображённую фигуру на прямоугольники 1×3?



Ответ: 6

Решение:

На каждой из сторон фигуры находится по три клетки. Если каждые такие клетки образуют полоску из трёх клеток, оставшийся квадрат 3×3 можно разбит двумя способами.

Если же на какой-то стороне три клетки не образуют полоску, оставшаяся часть фигуры разбивается однозначно.

2. (3 балла) На Острове Невезения живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды в комнате собралось n островитян.

Первый из них сказал: "Ровно 1 процент из присутствующих в этой комнате – лжецы."

Второй сказал: "Ровно 2 процента из присутствующих в этой комнате – лжецы."

и так далее

Человек с номером n сказал: "Ровно n процентов из присутствующих в этой комнате – лжецы."

Сколько человек могло быть в комнате, если точно известно, что хотя бы один из них рыцарь?

Ответ: 100

Решение:

Рыцарь должен быть ровно один, так как все островитяне в комнате противоречат друг другу. Значит, рыцарей $\frac{1}{n}$ от общего числа человек. Пусть их k процентов от общего числа присутствующих, это значит, человек с номером $100 - k$ сказал правду.

Получаем, что $\frac{1}{n} = \frac{k}{100}$, где $100 - k \leqslant n$.

Это можно переписать как $nk = 100$ и $k + n \geqslant 100$, откуда $nk - k - n \leqslant 0$.

Следовательно, $n - k - n + 1 \leqslant 1$, то есть $(n-1)(k-1) =\leqslant 1$. Поскольку n и k оба натуральные, получаем, что либо одно из них равно 1, либо оба они равны 2. Последний случай не удовлетворяет уравнению $nk = 100$.

Если $n = 1$, мы получаем, что единственный человек лжец, что противоречит условию.

Если $k = 1$, значит, $n = 100$ и правду говорит первый человек. Это и есть ответ.

3. (3 балла) Аня, Ваня, Даня и Таня собирали яблоки. Оказалось, что каждый их них собрал целое количество процентов от общего числа собранных яблок, причём все эти числа различны и больше нуля. Затем Таня, собравшая больше всех яблок, съела свои яблоки. После этого оказалось, что у каждого из ребят по-прежнему целое количество процентов, но уже от числа оставшихся яблок. Какое минимальное количество яблок могло быть собрано?

Ответ: 20: например 2+3+5+10

Решение:

Пусть Аня собрала меньше всех яблок и это число k, а общее число яблок n. Тогда мы получаем, что всего собрано не менее $4k+6$ яблок. При $k \geq 5$ мы получаем уже больше 20 яблок. При $k < 5$ получаем $n = 4k+6 > 5k$. Так как $\frac{n}{k}$ должно быть целым числом и делителем сотни, получается, что собрано не менее $10k$ яблок, то есть хотя бы 20 при любом k, большем 1.

При $k = 1$ получаем, что Аня, Ваня и Саня собрали хотя бы 6 яблок, а значит, аналогично предыдущим рассуждениям, их хотя бы 10. Значит, у всех четверых вместе их было хотя бы 20 (следующий делитель сотни).

4. (3 балла) Число, записанное на доске, разрешается умножать на 5 или переставлять в нём цифры (нельзя ставить ноль на первое место). Можно ли из числа 1 таким образом получить стозначное число $5222\ldots2221$?

Ответ: Нет

Решение:

Рассмотрим обратный процесс: будем пытаться из числа $5222\ldots2221$ получить 1 указанными операциями.

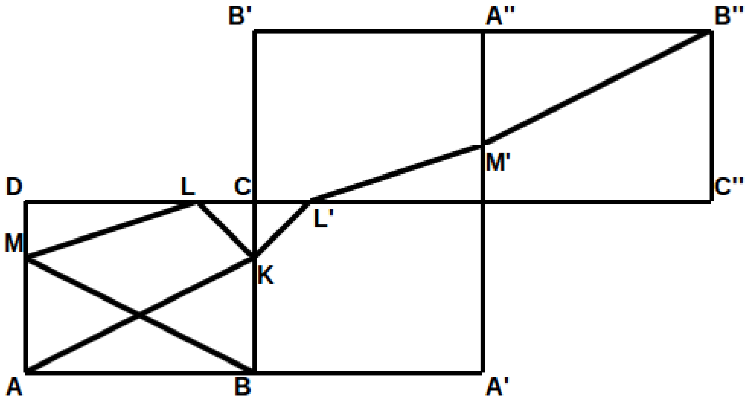
Сначала надо получить число делящееся на 5, а именно $222\ldots22122\ldots5 = 222\ldots22225-10^k$ (где k натуральное число) . Разделив его на 5, получим число $444\ldots445 - 2 \cdot 10^{k-1}$, то есть либо число вида $444\ldots44244\ldots445$, либо число $444\ldots443$. Второй случай нас не устраивает, так как из него невозможно получить никакое число с меньшим количеством цифр.

От перестановки цифр в первом случае изменится только число k. Поделим $444\ldots445 - 2 \cdot 10^{k-1}$ на 5, получим $888\ldots8889 - 4 \cdot 10^{k-2}$. Единственный способ сделать так, чтобы в получившемся числе была хотя бы одна пятёрка, это $k = 2$ и число $888\ldots885$. Теперь надо поделить на 5 его, получается число $166\ldots667$, в котором пятёрок нет. В этом числе как ни переставляй цифры, числа делящегося на 5 не получить, значит, 1 из него получить нельзя.

Значит и указанными в условии операциями не получить $5222\ldots2221$ из единицы.

5. (3 балла) Дан прямоугольник $ABCD$, $AB = 8$, $BC = 9$. Точка K лежит на стороне BC, точка L — на стороне CD, точка M — на стороне AD. Докажите, что длина ломаной $AKLMB$ не меньше 30.

Решение:



Достроим к нашему прямоугольнику ещё несколько равных ему, как показано на рисунке. Возьмём точку L' такую, что $CL = CL'$ и точку M такую, что $A''M' = AM$.

Из построения очевидно, что длина ломаной $AKLMB$ равна длине ломаной $AKL'M'B''$, которая длиннее, чем $AA**$. Длину этого отрезка можно вычислить по теореме Пифагора и она равна 30.

6. (3 балла) Аня посчитала все девятизначные числа, все цифры в каждом из которых различны, делящиеся на 9. Коля посчитал все десятизначные числа, все цифры в каждом из которых различны, делящиеся на 5. Кто из них насчитал больше чисел?

Ответ: оба насчитали одинаково.

Решение:

Построим взаимно однозначное соответствие между этими множествами чисел. Рассмотрим какое-то Анино число. Так как оно делится на 9, сумма его цифр также делится на 9. Чтобы это условие выполнялось, надо чтобы в этом числе были все цифры, кроме 0 или 9.

Допишем к Аниному числу сзади недостающую цифру, а потом поменяем местами 5 и 9. Теперь у нас получилось десятизначное число, заканчивающееся на 0 или 5, то есть как раз одно из тех чисел, что посчитал Коля.

Обратное преобразование тоже работает: поменяем местами 9 и 5, а потом уберём последнюю цифру.

Вместо этого, разумеется, можно было непосредственно посчитать количество и тех, и других чисел. Оно составляет $17 \cdot 8!$.

7. (3 балла) Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Точка P – пересечение BE и AC, точка Q пересечение CE и AD, точка O – пересечение AD и BE. Оказалось, что ABP и DEQ – равнобедренные треугольники с углом при вершине (именно при вершине, а не при основании), равным 80 градусов. Найдите значение угла ACE, если известно, что треугольники APO и EQO тоже равнобедренные.

Ответ: $60°$ или $105°$

Решение: Рассмотрим треугольник ABP. Угол $\angle APB$ в нём может быть равен $80°$ или $50°$. Тогда смежный $\angle APO$ составляет $100°$ или $130°$. Значит, в треугольнике APO это угол при вершине и $\angle AOP$ составляет $40°$ или $25°$.

Проведём аналогичные рассуждения для треугольников BQE и EQO, получим, что $\angle QOE$ также составляет $40°$ или $25°$ в зависимости от $\angle DQE$. Но $\angle QOE = \angle AOP$ как вертикальные, значит $\angle APB = \angle DQE$.

$\angle ACE = 360° - \angle CPO - \angle CQO - \angle POQ = 360° - 540° + \angle APO + \angle EQO + \angle AOP$, что составляет $60°$ или $105°$

8. (4 балла) На доске выписаны все трёхзначные натуральные числа, первые цифры которых нечётны и больше 1. Какое наибольшее количество квадратных уравнений вида $ax^2 + bx + c = 0$ можно составить, использовав в качестве a, b и c данные числа, каждое не больше одного раза так, чтобы все эти уравнения имели корни.

Ответ: 100.

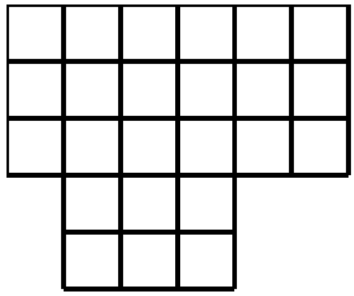
Решение:

В каждом уравнении обязательно должен быть коэффициент меньше пятиста. В противном случае дискриминант $b^2 - 4ac < 1000^2 - 4 \cdot 500^2 = 0$ и уравнение не имеет корней. Таким образом, получаем не больше 100 уравнений.

Теперь пример: В качестве b берём числа, начинающиеся на 9, в качестве a и c для каждого уравнение числа $500-k$ и $399+k$ соответственно, где k принимает натуральные значения от 0 до 99. Тогда $ac = (500-k)(399+k) < (500-k)(400+k) = 200000 + 100k - k^2 = 202500 - (k-50)^2 \leqslant 202500$. Значит, $4ac < 810000$, с другой стороны, $b^2 \geq 900^2 = 810000$, следовательно, $b \geqslant ac$.

8 класс
2 вариант

1. (2 балла) Сколькими способами можно разбить изображённую фигуру на прямоугольники 1×3?



Ответ: 8

Решение:

На левой стороне фигуры находятся три клетки. Если эти три клетки не образуют полоску 1×3, три полоски, содержащие их образуют квадрат 3×3. Оставшаяся часть фигуры распадается на прямоугольник 2×3 и квадрат 3×3. Первый разбивается единственным способом, второй двумя способами. Значит, мы получили два способа разбиения.

Если же эти три клетки образуют прямоугольник 1×3, рассмотрим нижние три клетки. Если они не образуют прямоугольник 1×3, оставшаяся фигура разбивается однозначно. Если они образуют прямоугольник 1×3, а находящиеся над ними три клетки не образуют, остальная фигура также разбиваются однозначно. Это ещё 2 способа.

Аналогично получаем ещё 2 способа, рассматривая самые правые клетки. Если же все указанные клетки образуют 4 прямоугольника 1×3, остаётся квадрат 3×3, который разбивается двумя способами.

2. (3 балла) На Острове Невезения живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды в комнате собралось n островитян.

Первый из них сказал: "Ровно 1 процент из присутствующих в этой комнате – рыцари."

Второй сказал: "Ровно 2 процента из присутствующих в этой комнате – рыцари."

и так далее

Человек с номером n сказал: "Ровно n процентов из присутствующих в этой комнате – рыцари."

Сколько человек могло быть в комнате, если точно известно, что хотя бы один из них рыцарь?

Ответ: 10, 20, 25, 50 или 100.

Решение:

Рыцарь должен быть ровно один, так как все островитяне в комнате противоречат друг другу. Значит, рыцарей $\frac{1}{n}$ от общего числа человек. Пусть их k процентов от общего числа присутствующих, это значит, человек с номером k сказал правду.

Получаем, что $\frac{1}{n} = \frac{k}{100}$, где $k \leqslant n$.

Это можно переписать как $nk = 100$, $n \geqslant \frac{100}{n}$. Значит, n может быть любым делителем сотни, не меньшим 10.

3. (3 балла) Аня, Ваня, Даня, Саня и Таня собирали яблоки. Оказалось, что каждый их них собрал целое количество процентов от общего числа собранных яблок, причём все эти числа различны и больше нуля. Затем Таня, собравшая больше всех яблок, съела свои яблоки. После этого оказалось, что у каждого из ребят попрежнему целое количество процентов, но уже от числа оставшихся яблок. Какое минимальное количество яблок могло быть собрано?

Ответ: 20: например 1+2+3+4+10

Решение:

Пусть Аня собрала меньше всех яблок, и это число k, а общее количество яблок n. Тогда мы получаем, что всего собрано не менее $4k + 10$ яблок. При $k \geq 3$ мы получаем уже больше 20 яблок. При $k = 2$ получаем $n \geq 18 = 9k$. Так как $\frac{n}{k}$ должно быть целым числом и делителем сотни, получается, что собрано не менее $10k$ яблок, то есть опять хотя бы 20. При $k = 1$ получаем, что ребята собрали хотя бы 15 яблок и это число, аналогично предыдущим рассуждениям, должно быть делителем сотни, то есть опять хотя бы 20 яблок.

4. (3 балла) Число, записанное на доске, разрешается умножать на 5 или переставлять в нём цифры (нельзя ставить ноль на первое место). Можно ли из числа 1 таким образом получить стопятидесятизначное число $5222\ldots 2223$?

Ответ: Нет

Решение:

Рассмотрим обратный процесс: будем пытаться из числа $5222\ldots 2223$ получить 1 указанными операциями.

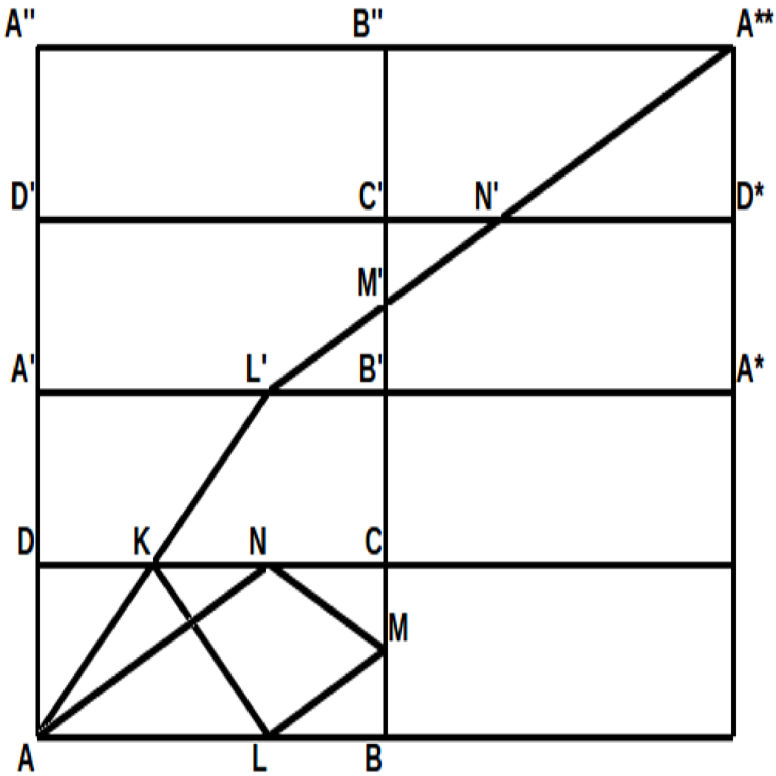
Сначала надо получить число делящееся на 5, а именно $222\ldots 22322\ldots 5 = 222\ldots 22225+10^k$ (где k натуральное число) . Разделив его на 5, получим число $444\ldots 445 + 2 \cdot 10^{k-1}$, то есть либо число вида $444\ldots 44644\ldots 445$, либо число $444\ldots 447$. Второй случай нас не устраивает, так как из него невозможно получить никакое число с меньшим количеством цифр.

От перестановки цифр в первом случае изменится только число k. Поделим $444\ldots 445+2\cdot 10^{k-1}$ на 5, получим $888\ldots 8889 + 4 \cdot 10^{k-2}$. В этом числе как ни переставляй цифры, числа делящегося на 5 не получить, значит, 1 из него получить нельзя.

Значит и указанными в условии операциями не получить $5222\ldots 2223$ из единицы.

5. (3 балла) Дан прямоугольник $ABCD$, $AB = 5$, $BC = 6$. Точка K лежит на стороне CD, точка L — на стороне AB, точка M — на стороне BC, точка N — на стороне CD. Докажите, что длина замкнутой ломаной $AKLMNA$ не больше 26.

Решение:



Достроим к нашему прямоугольнику ещё несколько равных ему, как показано на рисунке. Возьмём точку L' такую, что $AL = AL'$ и точку M такую, что $B'M' = BM$ и точку N' такую, что $C'N' = CN$.

Из построения очевидно, что длина ломаной $AKLMNA$ равна длине ломаной $AKL'M'N'A**$, которая длиннее, чем AB''. Длину этого отрезка можно вычислить по теореме Пифагора и она равна 26.

6. (3 балла) Аня посчитала все девятизначные числа, все цифры в каждом из которых различны, делящиеся на 9. Коля посчитал все десятизначные числа, все цифры в каждом из которых различны, делящиеся на 5. Кто из них насчитал больше чисел?

Ответ: оба насчитали одинаково.

Решение:

Построим взаимно однозначное соответствие между этими множествами чисел. Рассмотрим какое-то Анино число. Так как оно делится на 3, сумма его цифр также делится на 9. Чтобы это условие выполнялось, надо чтобы в этом числе были все цифры, кроме 0, 3, 6 или 9.

Допишем к Аниному числу сзади недостающую цифру, а потом поменяем местами 4 и 9, а также 2 и 3. Теперь у нас получилось десятизначное число, заканчивающееся на 0, 2, 4 или 6 то есть как раз одно из тех чисел, что посчитал Коля.

Обратное преобразование тоже работает: поменяем местами 4 и 9, а также 2 и 3, а потом уберём последнюю цифру.

Вместо этого, разумеется, можно было непосредственно посчитать количество и тех, и других чисел. Оно составляет $33 \cdot 8!$.

7. (3 балла) Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Точка P – пересечение BE и AC, точка Q пересечение CE и AD, точка O – пересечение AD и BE. Оказалось, что ABP и DEQ – равнобедренные треугольники с углом при вершине (именно при вершине, а не при основании), равным 40 градусов. Найдите значение угла ACE, если известно, что треугольники APO и EQO также равнобедренные.

Ответ: $120°$ или $75°$

Решение: Рассмотрим треугольник ABP. Угол $\angle APB$ в нём может быть равен $40°$ или $70°$. Тогда смежный $\angle APO$ составляет $140°$ или $110°$. Значит, в треугольнике APO это угол при вершине и $\angle AOP$ составляет $20°$ или $35°$.

Проведём аналогичные рассуждения для треугольников BQE и EQO, получим, что $\angle QOE$ также составляет $20°$ или $35°$ в зависимости от $\angle DQE$. Но $\angle QOE = \angle AOP$ как вертикальные, значит $\angle APB = \angle DQE$.

$\angle ACE = 360° - \angle CPO - \angle CQO - \angle POQ = 360° - 540° + \angle APO + \angle EQO + \angle AOP$, что составляет $120°$ или $75°$

8. (4 балла) На доске выписаны все трёхзначные натуральные числа, первые цифры которых нечётны и больше 1. Какое наибольшее количество квадратных уравнений вида $ax^2 + bx + c = 0$ можно составить, использовав в качестве a, b и c данные числа, каждое не больше одного раза так, чтобы все эти уравнения имели корни.

Ответ: 100.

Решение:

В каждом уравнении обязательно должен быть коэффициент меньше пятиста. В противном случае дискриминант $b^2 - 4ac < 1000^2 - 4 \cdot 500^2 = 0$ и уравнение не имеет корней. Таким образом, получаем не больше 100 уравнений.

Теперь пример: В качестве b берём числа, начинающиеся на 9, в качестве a и c для каждого уравнение числа $500-k$ и $399+k$ соответственно, где k принимает натуральные значения от 0 до 99. Тогда $ac = (500-k)(399+k) < (500-k)(400+k) = 200000 + 100k - k^2 = 202500 - (k-50)^2 \leqslant 202500$. Значит, $4ac < 810000$, с другой стороны, $b^2 \geq 900^2 = 810000$, следовательно, $b \geqslant ac$.