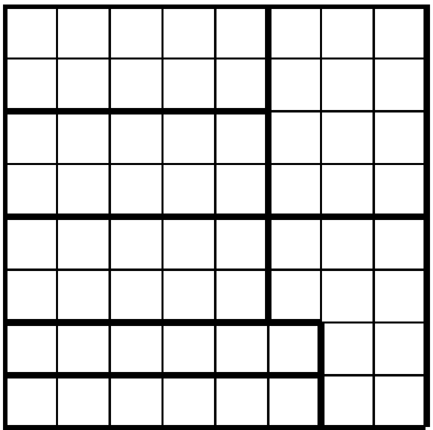
7 класс
1 вариант

1. (2 балла) Можно ли разрезать клетчатый квадрат 8×8 по клеточкам на 7 фигур равного периметра?

Ответ: Да.

Решение: Вот один из возможных примеров, разумеется, бывают и другие.



2. (3 балла) Мальчик Вася посмотрел на часы и увидел там какое-то время с количеством часов, большим нуля. Увиденные цифры он прочитал как трёх- или четырёхзначное число (например 5:07 превратилось бы у него в 507). Затем он вычислил количество минут, прошедшее с полуночи. Могло ли получиться так, что первое полученное им число делится на второе?

Ответ: Нет.

Решение:

Пусть на часах было a часов и b минут. Тогда число, которое увидел Вася, это $100a + b$, а вычисленное им число минут это $60a + b$. Если $100a + b$ делится на $60a + b$, то и их разность, $40a$ тоже делится на $60a + b$, но этого не может быть, так как при $a \neq 0$ $0 < 40a < 60a + b$.

3. (3 балла) У Ани было два треугольника, каждый из которых был составлен в точности из трех палочек натуральной длины. Затем из всех этих палочек сложили квадрат со стороной равной 5. Какие пары треугольников могли быть у Ани? Перечислите все возможные варианты и докажите, что других быть не могло.

Ответ:
1) 5, 5, 5 и 1, 2, 2;
2) 5, 5, 3 и 3, 2, 2;
3) 5, 5, 2 и 3, 3, 2;
4) 5, 5, 1 и 4, 3, 2;
5) 5, 5, 1 и 1, 4, 4;

Решение:

Давайте рассмотрим обратный процесс: пусть у нас есть четыре палочки длины 5, из которых сделан квадрат и нам надо сделать из них шесть палочек, из которых составлены треугольники. Для этого нам надо разделить одну из палочек на 3 части или две палочки на 2 части каждую.

Также заметим, что суммарная длина всех палочек составляет 20, значит, хотя бы у одного из треугольников периметр не больше 10, поэтому у него не может быть стороны 5, т.е. все отрезки длины 5 находятся в одном треугольнике.

Тогда если мы поделили один отрезок длины 5 на части натуральной длины, это значит, что эти части образуют один треугольник, а палочки длины 5 — другой. Так мы получаем первый ответ.

Рассмотрим оставшиеся случаи. Пусть в треугольник с двумя палочками длины 5 попала палочка длины 4. Тогда в оставшемся треугольнике есть палочка длины 1, а оставшиеся две это либо 1 и 4, либо 2 и 3. В любом случае треугольник не получается.

Пусть в треугольник с двумя палочками длины 5 попала палочка длины 3. Тогда в оставшемся треугольнике есть палочка длины 2, а оставшиеся две это либо 1 и 4, либо 2 и 3. В первом случае треугольник не получается, во втором случае мы получаем ответ номер 2.

Пусть в треугольник с двумя палочками длины 5 попала палочка длины 2. Тогда в оставшемся треугольнике есть палочка длины 3, а оставшиеся две это либо 1 и 4, либо 2 и 3. В первом случае треугольник не получается, во втором случае мы получаем ответ номер 3.

Наконец пусть в треугольник с двумя палочками длины 5 попала палочка длины 1. Тогда в оставшемся треугольнике есть палочка длины 4, а оставшиеся две это либо 1 и 4, либо 2 и 3. Так мы получаем последние 2 ответа.

4. (3 балла) На Острове Невезения живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды в комнате собралось n островитян.

Первый из них сказал: “В точности каждый первый из присутствующих в этой комнате – лжец.”

Второй сказал: “В точности каждый второй из присутствующих в этой комнате – лжец.”
и так далее
Человек с номером n сказал: “В точности каждый n-ый из присутствующих в этой комнате – лжец.”
Сколько человек могло быть в комнате?

Ответ: 2

Решение:
Давайте заметим, что среди этих человек точно есть один рыцарь, так как иначе получается, что первый островитянин — лжец, говорящий правду, что невозможно. Кроме того, первый человек обязательно лжец.

Кроме того, рыцарь ровно один, так как все говорящие противоречат друг другу. Значит, рыцарей не больше половины. С другой стороны, все островитяне утверждают, что рыцарей не меньше половины. Значит, их ровно половина, т.е. всего в комнате два человека.

5. (3 балла) Аня, Ваня, Даня, Саня и Таня собирали яблоки. Оказалось, что каждый их них собрал целое количество процентов от общего числа собранных яблок, причём все эти числа различны и больше нуля. Какое минимальное количество яблок могло быть собрано?

Ответ: 20

Решение:
Пример: разных примеров много, например $1 + 2 + 3 + 4 + 10$ или $2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$
Оценка (доказательство того, что яблок не меньше 20):
Пусть Аня собрала меньше всех яблок и это число хотя бы 2. Тогда мы получаем, что всего собрано не менее $2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$ яблок.

Если же у Ани 1 яблоко, а всего их n, значит $\frac{1}{n}$ – целое число процентов, т.е. n делитель 100, причём хотя бы 1+2+3+4+5=15. Минимальное подходящее число — 20.

6. (3 балла) Число, записанное на доске, разрешается умножать на 5 или переставлять в нём цифры (нельзя ставить ноль на первое место). Можно ли из числа 1 таким образом получить стозначное число $222\ldots2225$?

Ответ: Нет.

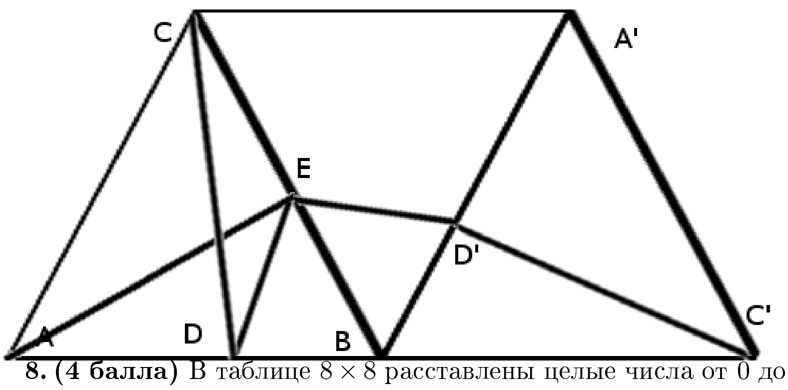
Решение:
Рассмотрим обратный процесс: будем пытаться из числа $222\ldots2225$ получить 1 указанными операциями.

Заметим, что единственный способ получить перестановками цифр число, делящееся на 5, это само число $222\ldots2225$. Поделим его на 5, получится $44\ldots445$. В этом числе опять-таки бессмысленно переставлять цифры поэтому разделим его на 5. Получим число $888\ldots889$. В этом числе как не переставляй цифры, числа делящегося на 5 не получить.

Значит и указанными в условии операциями не получить $222\ldots2225$ из единицы.

7. (3 балла) Дан равносторонний треугольник ABC. На сторонах AB и BC отмечены точки D и E соответственно. Докажите, что длина ломаной $AEDC$ не меньше, чем $2AB$.

Решение:
Построим равносторонние треугольники $A'BC$ и $A'BC'$ так, как на рисунке. На отрезке $A'B$ возьмём точку D' такую, что $BD = BD'$. Рассматривая несколько пар равных треугольников, легко доказать, что длина ломаной $AEDC$ равна длине ломаной $AED'C'$, что, очевидно, больше $AC' = 2AC$.



8. (4 балла) В таблице 8×8 расставлены целые числа от 0 до 10 (естественно, числа могут повторяться, не обязательно все указанные числа встречаются). Известно, что в каждом прямоугольнике 3×2 или 2×3 сумма чисел равна 10. Найдите наименьшее возможное значение суммы чисел во всей таблице.

Ответ: 105

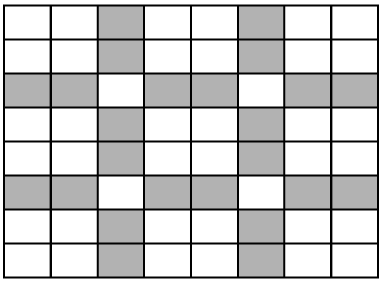
Решение:
Посмотрим на левую часть приведённого ниже рисунка. Рассмотрим прямоугольники 3×2 и 2×3, содержащие левый верхний квадрат 2×2. Оставшиеся части этих двух прямоугольников — это самые левые верхние прямоугольники 1×2 и 2×1, закрашенные серым. Поскольку в обоих прямоугольниках 3×2 и 2×3 сумма чисел равна 10, в сумма чисел в этих двух серых прямоугольниках равны.

Аналогично доказывается, что равны суммы чисел во всех серых прямоугольниках на картинке, а также во всех белых квадратах 2×2. Пусть в каждом белом квадрате в сумме стоит число x, тогда в каждом сером прямоугольнике число $10 - x$, значит, общая сумма чис в таблице хотя бы $9x + 12(10 - x) = 120 - 3x$. Если $x < 5$, получается число большее, чем 105.

С другой стороны, вся таблица, кроме левого вехнего квадрата 2×2 разбивается на прямоугольники 3×2 и 2×3, в общей сложности, на 10 штук. Значит, общая сумма чисел в таблице равна $100 + x$, то есть, при $x > 5$ получается число большее, чем 105.

Значит, сумма всех чисел в таблице не меньше 105.

Пример приведён в правой части рисунка, клетки, заполненные нулями, для удобства оставлены пустыми.



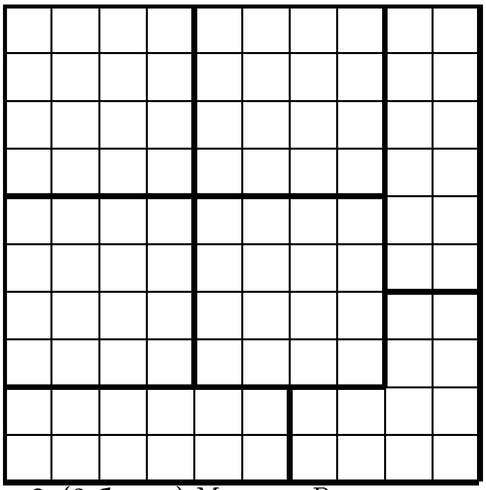
		5			5		
	5			5			5
5			5			5	
		5			5		
	5			5			5
5			5			5	
		5			5		
	5			5			5

7 класс
2 вариант

1. (2 балла) Можно ли разрезать клетчатый квадрат 10×10 по клеточкам на 7 фигур равного периметра?

Ответ: Да.

Решение: Вот один из возможных примеров, разумеется, бывают и другие.



2. (3 балла) Мальчик Вася посмотрел на часы и увидел там какое-то время с количеством часов, большим нуля. Увиденные цифры он прочитал как трёх- или четырёхзначное число (например 5:07 превратилось бы у него в 507). Затем он вычислил количество минут, прошедшее с полуночи. Могло ли получиться так, что удвоенное второе полученное им число делится на первое?

Ответ: Нет.

Решение:

Пусть на часах было a часов и b минут. Тогда число, которое увидел Вася, это $100a + b$, а вычисленное им число минут это $60a + b$. Если $120a + 2b$ делится на $100a + b$, то и их разность, $20a + b$ тоже делится на $100a + b$, но этого не может быть, так как при $a \neq 0$ $0 < 20a + b < 120a + b$.

3. (3 балла) У Ани было два треугольника, каждый из которых был составлен в точности из трех палочек натуральной длины. Затем из всех этих палочек сложили квадрат со стороной равной 4. Какие пары треугольников могли быть у Ани? Перечислите все возможные варианты и докажите, что других быть не могло.

Ответ:
1) 4, 4, 3 и 1, 2, 2;
2) 4, 4, 2 и 2, 2, 2;
3) 4, 4, 1 и 3, 2, 2;
4) 4, 4, 1 и 3, 3, 1;

Решение:

Давайте рассмотрим обратный процесс: пусть у нас есть четыре палочки длины 4, из которых сделан квадрат и нам надо сделать из них шесть палочек, из которых составлены треугольники. Для этого нам надо разделить одну из палочек на 3 части или две палочки на 2 части каждую.

Также заметим, что суммарная длина всех палочек составляет 16, значит, хотя бы у одного из треугольников периметр не больше 8, поэтому у него не может быть стороны 4, т.е. все отрезки длины 4 находятся в одном треугольнике.

Тогда если мы поделили один отрезок длины 4 на части натуральной длины, это значит, что эти части образуют один треугольник, а палочки длины 4 — другой. Но отрезок длины 4 нельзя разбить на три части так, чтобы получился треугольник.

Рассмотрим оставшиеся случаи. Пусть в треугольник с двумя палочками длины 4 попала палочка длины 3. Тогда в оставшемся треугольнике есть палочка длины 1, а оставшиеся две это либо 1 и 3, либо 2 и 2. В первом случае треугольник не получается, во втором случае мы получаем ответ номер 1.

Пусть в треугольник с двумя палочками длины 4 попала палочка длины 2. Тогда в оставшемся треугольнике тоже есть палочка длины 2, а оставшиеся две это либо 1 и 3, либо 2 и 2. В первом случае треугольник не получается, во втором случае мы получаем ответ номер 2.

Наконец пусть в треугольник с двумя палочками длины 4 попала палочка длины 1. Тогда в оставшемся треугольнике есть палочка длины 3, а оставшиеся две это либо 1 и 3, либо 2 и 2. Так мы получаем последние 2 ответа.

4. (3 балла) На Острове Невезения живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды в комнате собралось n островитян.

Первый из них сказал: “В точности каждый второй из присутствующих в этой комнате – лжец.”

Второй сказал: “В точности каждый третий из присутствующих в этой комнате – лжец.”

и так далее

Человек с номером n сказал: “В точности каждый $(n - 1)$-ый из присутствующих в этой комнате – лжец.”

Сколько человек могло быть в комнате, если известно, что не все они лжецы?

Ответ: 2

Решение:

По условию среди этих человек точно есть хотя бы один рыцарь. Следовательно, людей хотя бы двое, иначе первый человек рыцарь, говорящий неправду.

Кроме того, рыцарь ровно один, так как все говорящие противоречат друг другу. Значит, рыцарей не больше половины. С другой стороны, все островитяне, включая рыцаря, который говорит правду, утверждают, что рыцарей не меньше половины. Значит, их ровно половина, т.е. всего в комнате два человека.

5. (3 балла) Аня, Ваня, Даня, Маня, Саня и Таня собирали яблоки. Оказалось, что каждый их них собрал целое количество процентов от общего числа собранных яблок, причём все эти числа различны и больше нуля. Какое минимальное количество яблок могло быть собрано?

Ответ: 25

Решение:

Пример: разных примеров много, например $1+2+3+4+5+10$.

Оценка (доказательство того, что яблок не меньше 25):

Пусть Аня собрала меньше всех яблок и это число хотя бы 2. Тогда мы получаем, что всего собрано не менее $2+3+4+5+6+7=27$ яблок.

Если же у Ани 1 яблоко, а всего их n, значит $\frac{1}{n}$ – целое число процентов, т.е. n делитель 100, причём хотя бы $1+2+3+4+5+6=2$. Минимальное подходящее число — 25.

6. (3 балла) Число, записанное на доске, разрешается умножать на 5 или переставлять в нём цифры (нельзя ставить ноль на первое место). Можно ли из числа 1 таким образом получить стозначное число $777\ldots7775$?

Рассмотрим обратный процесс: будем пытаться из числа $777\ldots7775$ получить 1 указанными операциями.

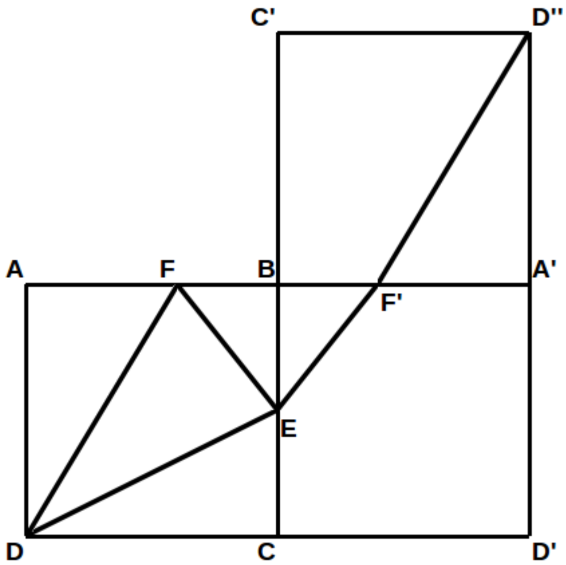
Заметим, что единственный способ получить перестановками цифр число, делящееся на 5, это само число $777\ldots7775$. Поделим его на 5, получится $1555\ldots555$. Переставив в нём как-нибудь цифры и затем разделив на 5. Получим число $111\ldots1103111\ldots1111$ (возможно, тройка стоит в начале, тогда 0 перед ней не пишется.). В этом числе как не переставляй цифры, числа делящегося на 5 не получить.

Значит и указанными в условии операциями не получить $777\ldots77775$ из единицы.

7. (3 балла) Дан квадрат $ABCD$. На сторонах AB и BC отмечены точки F и E соответственно. Докажите, что периметр треугольника DEF не меньше, чем $2AC$.

Решение:

Построим квадраты $A'BCD'$ и $A'BC'D'$ так, как на рисунке. На отрезке $A'B$ возьмём точку F' такую, что $BF = BF'$. Рассмотривая несколько пар равных треугольников, легко доказать, что периметр треугольника DEF равен длине ломаной $DEF'D'$, что, очевидно, больше $DD' = 2BD = 2AC$.



8. (4 балла) В таблице 11×11 расставлены целые числа от 0 до 10 (естественно, числа могут повторяться, не обязательно все указанные числа встречаются). Известно, что в каждом прямоугольнике 3×2 или 2×3 сумма чисел равна 10. Найдите наименьшее возможное значение суммы чисел во всей таблице.

Ответ: 200

Решение:

На правой части приведённого ниже рисунка приводится разрезание таблицы на 20 прямоугольников и одну клетку. Значит, сумма чисел во всей таблице не меньше суммы чисел в этих 20 прямоугольниках, то есть 200.

Пример приведён в левой части рисунка, клетки, заполненные нулями, для удобства оставлены пустыми.

		5			5			5		
	5			5			5			5
5			5			5			5	
		5			5			5		
	5			5			5			5
5			5			5			5	
		5			5			5		
	5			5			5			5
5			5			5			5	
		5			5			5		
	5			5			5			5