10 класс
1 вариант

1. (1 балла)
У Коли в тетради был записан многочлен сотой степени. Коля может взять один из записанных в тетради многочленов, прибавить a к коэффициенту при k-ой степени и вычесть $2a$ из коэффициента при $(k+1)$-й степени, после чего записать полученный многочлен в тетрадь к уже имеющимся. Могут ли у него в тетради после некоторого количества таких действий оказаться два многочлена, один из которых строго больше другого?

Если коэффициент при какой-то степени равен нулю, с ним тоже можно производить эту операцию.

Ответ: Нет.

Решение: Заметим, что при этих операциях не меняется значение многочлена в точке $\frac{1}{2}$, значит, все многочлены, оказавшиеся у Коли в тетрадке, будут совпадать в этой точке, и поэтому ни один из них не будет строго больше другого.

2. (2 балла) Решите уравнение $f^{-1}(g(x)) = h(x)$, где $f^{-1}(x)$ – обратная функция к $f(x)$, если известно, что $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$, $g(x) = x^4 - x^3 + 4x^2 + 8x + 8$, $h(x) = x + 1$.

Ответ: $\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

Решение: Можно переписать исходное уравнение как $g(x) = f(h(x))$, то есть как $(x+1)^3 + 2(x+1)^2 + 3(x+1) + 1 = x^4 - x^3 + 4x^2 + 8x + 8$.

Раскроем скобки и перенесём всё в правую часть: $x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$. Заметим, что многочлен в левой части делится на $x^2 + x + 1$. Этот трёхчлен не имеет корней, а вот частное имеет: это трёхчлен $x^2 - 3x + 1$, и его корни $\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

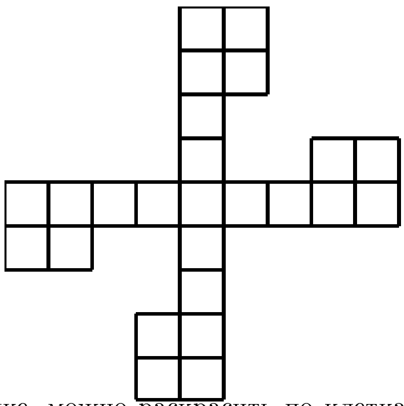
3. (3 балла) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность S. Окружности S_1 и S_2 равного радиуса касаются окружности S изнутри в точках A и C соответственно. Окружность S_1 пересекается со сторонами AB и AD в точках K и N соответственно, окружность S_2 пересекается со сторонами BC и CD в точках L и M соответственно. Докажите, что $KLMN$ — параллелограмм.

Решение:
Заметим, что треугольник AKN подобен треугольнику ABD с коэффициентом подобия $\dfrac{r}{R}$, где R — радиус окружности S, а r — радиус окружностей S_1 и S_2. Аналогично треугольник CML подобен треугольнику CBD с теи же коэффициентом.

Отсюда отрезки KN и ML параллельны отрезку BD и относятся к нему как $\dfrac{r}{R}$, то есть они параллельны и равны. Значит, $KLMN$ — параллелограмм, что и требовалось доказать.

4. (3 балла) Докажите, что сумма бесконечной арифметической прогрессии и бесконечной непостоянной геометрической прогрессии никогда не будет арифметической прогрессией.

Решение:
Утверждение задачи эквивалентно тому, что разность двух арифметических прогрессий не бывает геометрической прогрессией. Но разность двух арифметических прогрессий — это арифметическая прогрессия, а арифметическая прогрессия больше чем из двух членов не может совпадать с геометрической, потому что у арифметической прогрессии разность между соседними членами постоянна, а у геометрической с увеличением номера на 1 разность увеличивается в q раз, где q — знаменатель прогрессии.



5. (3 балла) Сколькими способами фигуру, изображённую на рисунке, можно раскрасить по клеткам в синий, красный и белый цвета так, чтобы соседние (т.е. имеющие общие стороны) клетки были раскрашены в разные цвета?

Ответ: $3 \cdot 48^4$

Решение: Центральную клетку можно раскрасить тремя способами. После этого нам осталось раскрасить четыре одинаковых фигурки из шести клеток с одним и тем же ограничением на цвет клетки, соседней с центральной (назовём её клеткой А).

Рассмотрим квадрат 2×2. В таком квадрате должны быть две клетки одного цвета и расположены они должны быть по диагонали. Двумя способами выбираем диагональ, тремя способами её цвет и ещё по два способа на выбор цвета для остальных клеток, итого 24 способа. Однако при этом квадраты, покрашенные в два цвета мы посчитали дважды, поэтому остаётся 18 способом.

При этом, очевидно, для каждого из трёх цветов есть по 6 способов таких, что клетка, соседняя не только с клетками квадрата, имеет именно этот цвет. Эту клетку назовём клеткой Б.

Клетка А может быть покрашена двумя способами. Для каждого из этих способов есть 6 способов раскраски квадрата таких, что клетка Б покрашена в тот же цвет. Тогда клетку между ними можно покрасить двумя способами, итого $2 \cdot 6 \cdot 2 = 24$ варианта.

Кроме того, для каждого из способов покрасить клетку А есть 12 способов раскраски квадрата таких, что клетка Б имеет другой цвет. В этом случае клетка между ними красится однозначно, поэтому опять получаем 24 способа. Итого 48 способов раскраски каждой такой фигуры.

Следовательно, ответ в задаче $3 \cdot 48^4$.

6. (3 балла) В пространстве расположен куб $1000 \times 1000 \times 1000$ с вершиной в начале координат и гранями, параллельными координатным плоскостям. Из начала координат проведены векторы во все целочисленные точки внутри и на границе этого куба. Найдите остаток от деления суммы квадратов длин этих векторов на 13.

Ответ: 0

Решение:

Сумма квадратов длин этих векторов — это сумма квадратов всех их координат, то есть $3 \cdot 1001^2 \cdot (0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + 1000^2)$, что делится на 13, так как 1001 делится на 13.

7. (4 балла) Дан треугольник ABC, точка I – центр его вписанной окружности. На лучах BI и CI соответственно отмечены такие (отличные от I) точки E и F, что $AI = AE = AF$. Докажите, что площади треугольников BIF и CIE равны.

Решение:

Рассмотрим точку D — середину дуги BC описанной окружности треугольника ABC. По лемме о трезубце $DB = DC = DI$. Треугольники DBI и AEI подобны, так как это равнобедренные треугольники с равными углами при основании (углы в точке I равны как вертикальные, потому что точки A, I и D лежат на одной прямой — биссектрисе угла A). Аналогично подобны треугольники DCI и AFI.

Отсюда получаем $\dfrac{BI}{EI} = \dfrac{DI}{AI} = \dfrac{CI}{FI}$ (первое равенство из первого подобия, второе — из второго). Раскрывая пропорцию, имеем $BI \cdot FI = CI \cdot EI$. Из этого равенства следует требуемое равенство площадей треугольников BIF и CIE поскольку углы при вершине I в треугольниках BIF и CIE равны как вертикальные,

8. (5 баллов) В некоторой стране 100 городов и 146 авикомпаний. Любые два города соединены двусторонними рейсами одной или нескольких авиакомпаний. Стоимость перелёта между городами, соединёнными рейсами k авиакомпаний, для всех компаний одинакова и составляет $\frac{1}{k}$. Оказалось, что не существует городов, между которыми с пересадкой можно добраться дешевле, чем прямым рейсом. Докажите, что можно найти маршрут с одной пересадкой, обе части которого стоят одинаково.

Решение:

На самом деле нам надо доказать, что существует два рейса одинаковой цены из одного города. Предположим противное. Тогда все перелёты из любого города имеют разную цену.

Рассмотрим самый дорогой рейс. Он самый дорогой в каждом из своих городов, а значит существует хотя бы 98 более дешёвых перелётов. Тогда этот самый дорогой рейс имеет цену $\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{48}$, т.е. $k \leqslant 48$.

Возможных стоимостей, меньших $\frac{1}{k}$, но не меньших $\frac{1}{2k}$ всего k. Значит, в каждом из городов, которые соединяет самый дорогой рейс, есть ещё не более k рейсов не дешевле $\frac{1}{2k}$, то есть всего их в этих двух городах не более $2k \leqslant 96$ (не считая самого дорогого). Но это значит, что в какой-то из оставшихся 98 городов из обоих концов самого дорогого рейса ведут рейсы ценой ниже $\frac{1}{2k}$. Следовательно, если мы воспользуемся этими двумя рейсами, мы сможем пролететь между концами самого дорогого рейса дешевле, чем этим рейсом, что противоречит условию.

Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

10 класс
2 вариант

1. (2 балла)
У Коли в тетради был записан многочлен двухсотой степени. Коля может взять один из записанных в тетради многочленов, прибавить $2a$ к коэффициенту при k-ой степени и вычесть a из коэффициента при $(k+1)$-й степени, после чего записать полученный многочлен в тетрадь к уже имеющимся. Могут ли у него в тетради после некоторого количества таких действий оказаться два многочлена, один из которых строго больше другого?

Если коэффициент при какой-то степени равен нулю, с ним тоже можно производить эту операцию.

Ответ: Нет.

Решение: Заметим, что при этих операциях не меняется значение многочлена в точке 2, значит, все многочлены, оказавшиеся у Коли в тетрадке, будут совпадать в этой точке, и поэтому ни один из них не будет строго больше другого.

2. (2 балла) Решите уравнение $f^{-1}(g(x)) = h(x)$, где $f^{-1}(x)$ – обратная функция к $f(x)$, если известно, что $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$, $g(x) = x^4 + 2x^3 + 1x^2 + 11x + 11$, $h(x) = x + 1$.

Ответ: $\dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ и 1.

Решение: Можно переписать исходное уравнение как $f(h(x)) = g(x)$, то есть как $(x+1)^3 + 2(x+1)^2 + 3(x+1) + 4 = x^4 + 2x^3 + x^2 + 11x + 11$.

Раскроем скобки и перенесём всё в правую часть: $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$. Заметим, что многочлен в левой части делится на $x-1$, и, более того на $(x-1)^2$. Значит, мы получаем корень 1 кратности 2. Кроме того, частное от деления нашего многочлена четвёртой степени на $(x-1)^2$ это трёхчлен $x^2 + 3x + 1$, и его корни $\dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

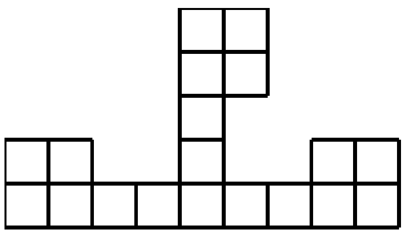
3. (3 балла) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность S. Окружности S_1 и S_2 касаются окружности S изнутри в точках A и C соответственно. Окружность S_1 пересекается со сторонами AB и AD в точках K и N соответственно, окружность S_2 пересекается со сторонами BC и CD в точках L и M соответственно. Оказалось, что прямые KL и MN параллельны. Докажите, что радиусы окружностей S_1 и S_2 равны.

Решение:

Заметим, что треугольник AKN подобен треугольнику ABD с коэффициентом подобия $\dfrac{r_1}{R}$, где R — радиус окружности S, а r_1 — радиус окружности S_1. Аналогично треугольник CML подобен треугольнику CBD. с коэффициентом подобия $\dfrac{r_2}{R}$ где r_2 — радиус окружности S_2.

Отсюда отрезки KN и ML параллельны отрезку BD. Кроме того, прямые KL и MN параллельны, следовательно, $KLMN$ — параллелограмм, откуда $KN = ML$. Но эти отрезки относятся к отерзку BD как $\dfrac{r_1}{R}$ и $\dfrac{r_2}{R}$ соответственно, а значит, эти отношения равны, откуда следует требуемое равенство окружностей.

4. (3 балла) Найдите все пары геометрических прогрессий таких, что их сумма также геометрическая прогрессия.



Ответ: знаменатель у этих прогрессий должен быть одинаковый и сумма первых членов не равна 0.

Кроме того, подходят любые прогрессии из двух элементов с ненулевыми суммами первых и вторых членов.

Решение:

Назовём наши прогрессиии a_n и b_n, а их знаменатели p и q. Рассмотрим первые три члена каждой прогрессии. Чтобы сумма также была геометрической прогрессией, необходимо $(a_1 + b_1)(a_1p^2 + b_1q^2) = (a_1p + b_1q)^2$.

Раскрывая скобки и сокращая одинаковые слагаемы, получаем $a_1b_1p^2 + a_1b_1p^2 = 2a_1b_1pq$. Сокращая на a_1b_1 и перенося всё в левую часть, получаем $(p-q)^2 = 0$. Это возможно только когда $p = q$. Кроме того, требуется ещё и чтобы $a_n + b_n$ не было равно нулю как первый член геометрической прогрессии.

5. (3 балла) Сколькими способами фигуру, изображённую на рисунке, можно раскрасить по клеткам в синий, красный и белый цвета так, чтобы соседние (т.е. имеющие общие стороны) клетки были раскрасены в разные цвета?

Ответ: $3 \cdot 48^3$.

Решение: Центральную клетку можно раскрасить тремя способами. После этого нам осталось раскрасить четыре одинаковых фигурки из шести клеток с одним и тем же ограничением на цвет клетки, соседней с центральной (назовём её клеткой А).

Рассмотрим квадрат 2×2. В таком квадрате должны быть две клетки одного цвета и расположены они должны быть по диагонали. Двумя способами выбираем диагональ, тремя способами её цвет и ещё по два способа на выбор цвета для остальных клеток, итого 24 способа. Однако при этом квадраты, покрашенные в два цвета мы посчитали дважды, поэтому остаётся 18 способом.

При этом, очевидно, для каждого из трёх цветов есть по 6 способов таких, что клетка, соседняя не только с клетками квадрата, имеет именно этот цвет. Эту клетку назовём клеткой Б.

Клетка А может быть покрашена двумя способами. Для каждого из этих способов есть 6 способов раскраски квадрата таких, что клетка Б покрашена в тот же цвет. Тогда клетку между ними можно покрасить двумя способами, итого $2 \cdot 6 \cdot 2 = 24$ варианта.

Кроме того, для каждого из способов покрасить клетку А есть 12 способов раскраски квадрата таких, что клетка Б имеет другой цвет. В этом случае клетка между ними красится однозначно, поэтому опять получаем 24 способа. Итого 48 способов раскраски каждой такой фигуры.

Следовательно, ответ в задаче $3 \cdot 48^3$.

6. (3 балла) В пространстве расположен куб $1000 \times 1000 \times 1000$ с вершиной в начале координат и гранями, параллельными координатным плоскостям. Из начала координат проведены векторы во все целочисленные точки внутри и на границе этого куба. Найдите остаток от деления суммы квадратов длин этих векторов на 11.

Ответ: 0

Решение:

Сумма квадратов длин этих векторов — это сумма квадратов всех их координат, то есть $3 \cdot 1001^2 \cdot (0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + 1000^2)$, что делится на 11, так как 1001 делится на 11.

7. (4 балла) Дан треугольник ABC, точка I – центр его вписанной окружности. На лучах BI и CI соответственно отмечены такие (отличные от I) точки E и F, что $AI = AE = AF$. Докажите, что $EF \parallel BC$

Решение:

Рассмотрим точку D — середину дуги BC описанной окружности треугольника ABC. По лемме о трезубце $DB = DC = DI$. Треугольники DBI и AEI подобны, так как это равнобедренные треугольники с равными углами при основании (углы в точке I равны как вертикальные, потому что точки A, I и D лежат на одной прямой — биссектрисе угла A). Аналогично подобны треугольники DCI и AFI.

Отсюда получаем $\dfrac{BI}{EI} = \dfrac{DI}{AI} = \dfrac{CI}{FI}$ (первое равенство из первого подобия, второе — из второго). Следовательно, треугольники FIE и CIB также подобны, поскольку углы в точке I в этих треугольниках равны как вертикальные.

Значит $\angle FEI = \angle CBI$, а это накрест лежащие углы при прямых EF и BC, поэтому прямые параллельны.

8. (5 баллов) В некоторой стране 50 городов и 71 авикомпания. Любые два города соединены двусторонними рейсами одной или нескольких авиакомпаний. Стоимость перелёта между городами, соединёнными рейсами k авиакомпаний, для всех компаний одинакова и составляет $\frac{1}{k}$. Оказалось, что не существует городов, между которыми с пересадкой можно добраться дешевле, чем прямым рейсом. Докажите, что можно найти маршрут с одной пересадкой, обе части которого стоят одинаково.

Решение:

На самом деле нам надо доказать, что существует два рейса одинаковой цены из одного города. Предположим противное. Тогда все перелёты из любого города имеют разную цену.

Рассмотрим самый дорогой рейс. Он самый дорогой в каждом из своих городов, а значит существует хотя бы 48 более дешёвых перелётов. Тогда этот самый дорогой рейс имеет цену $\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{23}$, т.е. $k \leqslant 23$.

Возможных стоимостей, меньших $\frac{1}{k}$, но не меньших $\frac{1}{2k}$ всего k. Значит, в каждом из городов, которые соединяет самый дорогой рейс, есть ещё не более k рейсов не дешевле $\frac{1}{2k}$, то есть всего их в этих двух городах не более $2k \leqslant 46$ (не считая самого дорогого). Но это значит, что в какой-то из оставшихся 48 городов из обоих концов самого дорогого рейса ведут рейсы ценой ниже $\frac{1}{2k}$. Следовательно, если мы воспользуемся этими двумя рейсами, мы сможем пролететь между концами самого дорогого рейса дешевле, чем этим рейсом, что противоречит условию.

Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.