10 класс

Задача 1. (1 балл)

1. Дана функция $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$. Найдите $\underbrace{f(f(\ldots(3)\ldots))}_{2015\,раз}$.

Ответ: -2

2. Дана функция $f(x)=\frac{x+1}{1-x}$. Найдите $\underbrace{f(f(\ldots(7)\ldots))}_{2011\,раз}$.

Ответ: 3/4 | 0,75

3. Дана функция $f(x)=-\frac{x+1}{x-1}$. Найдите $\underbrace{f(f(\ldots(2)\ldots))}_{2017\,раз}$.

Ответ: -3

Примеры записи ответов:
1/4
0,25
-10

Задача 2. (2 балла)

1. На планете Острые Зубы животные размножаются по-особенному, а именно: каждый хомячок каждый год рождает четырёх хомячков; каждый суслик каждые 3 месяца рождает двух маленьких сусликов; а кролики — загадочные существа — чем больше времени проходит, тем быстрее они размножаются, а именно, если человек не отдаёт своих кроликов и не покупает новых, то по прошествии $2k$ месяцев количество его кроликов увеличивается в $k!$ раз. ($k!$ - произведение чисел от 1 до k).
Никита купил на рынке грызунов. Известно, что через год у него стало 765 домашних питомцев. Сколько грызунов Никита купил на рынке?
Если возможных ответов несколько, выпишите их в порядке возрастания через точку с запятой.

Ответ: 10; 77; 153 | 11, 77, 153

2. На планете Острые Зубы животные размножаются по-особенному, а именно: каждый хомячок каждые 3 месяца рождает двух хомячков; каждый суслик каждые 4 месяца рождает одного маленького суслика; а кролики — загадочные существа — чем больше времени проходит, тем быстрее они размножаются, а именно, если человек не отдаёт своих кроликов и не покупает новых, то по прошествии $2k$ месяцев количество его кроликов увеличивается в $k!$ раз. ($k!$ - произведение чисел от 1 до k).
Антон купил в зоомагазине грызунов. Известно, что через год у Антона стало 720 домашних питомцев. Сколько грызунов Антон купил в зоомагазине?
Если возможных ответов несколько, выпишите их в порядке возрастания через точку с запятой.

Ответ: 1; 17; 90 | 1, 17, 90

3. На планете Острые Зубы животные размножаются по-особенному, а именно: каждый хомячок каждые 4 месяца рождает четверых хомячков; каждый суслик каждые 4 месяца рождает одного маленького суслика; а кролики — загадочные существа — чем больше времени проходит, тем быстрее они размножаются, а именно, если человек не отдаёт своих кроликов и не покупает новых, то по прошествии $2k$ месяцев количество его кроликов увеличивается в $k!$ раз. ($k!$ - произведение чисел от 1 до k).
Мальчик Илья купил в зоомагазине грызунов. Известно, что через год у Ильи было 1040 домашних зверей. А сколько грызунов Илья купил в зоомагазине?
Если возможных ответов несколько, выпишите их в порядке возрастания через точку с запятой.

Ответ: 13, 41, 130 | 13; 41; 130

Примеры записи ответов:
9
9; 23

Задача 3. (2 балла)

1. Три подряд идущих члена геометрической прогрессии со знаменателем q использовали в качестве коэффициентов квадратного трёхчлена. Оказалось, что этот трёхчлен имеет ровно один корень. Найдите q^3.
Если возможных ответов несколько, выпишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 1/4; 4 | 0,25; 4 | 4; 0,25 | 4; 1/4 | 1/4, 4 | 4; 0,25 | 4, 1/4 |

2. Три подряд идущих члена геометрической прогрессии со знаменателем q использовали в качестве коэффициентов квадратного трёхчлена. Оказалось, что этот трёхчлен имеет два различных корня. При каком наименьшем натуральном q это возможно?

Ответ: 2

3. Три подряд идущих члена геометрической прогрессии со знаменателем q использовали в качестве коэффициентов квадратного трёхчлена, причём средний член оказался первым коэффициентом. При каком наибольшем целом q получившийся трёхчлен будет иметь два различных корня вне зависимости от того, как расставлены остальные два коэффициента?

Ответ: -1

<u>Примеры записи ответов:</u>
2
5; 9

Задача 4. (3 балла)

1. Дана функция $f(x)$, удовлетворяющая условию $f(x)+f(y)=f(\sqrt{x^2+y^2})$. Известно, что $f(1)=2$. Найдите $f(15)$.

Ответ: 450.

2. Дана функция $f(x)$, удовлетворяющая условию $f(x)+f(y)=f(\sqrt{x^2+y^2})$. Известно, что $f(1)=4$. Найдите $f(10)$.

Ответ: 400.

3. Дана функция $f(x)$, удовлетворяющая условию $f(x)+f(y)=f(\sqrt{x^2+y^2})$. Известно, что $f(1)=5$. Найдите $f(12)$.

Ответ: 720.

<u>Примеры записи ответов:</u>
1/4
-0,25; 10

Задача 5. (3 балла)

1. Последовательность c_n — сумма геометрической прогрессии b_n с первым членом 5 и некоторой арифметической прогрессии. Известно, что $c_1 + c_3 = 121$, $c_2 = 38$. Найдите знаменатель прогрессии b_n. Если возможных ответов несколько, выпишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: -2; 4 | 4; -2 | 4, -2

2. Последовательность c_n — сумма геометрической прогрессии b_n с первым членом 4 и некоторой арифметической прогрессии. Известно, что $c_1 + c_3 = 128$, $c_2 = 32$. Найдите знаменатель прогрессии b_n. Если возможных ответов несколько, выпишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: -3; 5 | 5; -3 | 5, -3

3. Последовательность c_n — сумма геометрической прогрессии b_n с первым членом 3 и некоторой арифметической прогрессии. Известно, что $c_1 + c_3 = 141$, $c_2 = 33$. Найдите знаменатель прогрессии b_n. Если возможных ответов несколько, выпишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: -4; 6 | 6; -4 | 6, -4

<u>Примеры записи ответов:</u>
1/4
0,25; -10

Задача 6. (3 балла)

1. Дана точка на плоскости, не совпадающая с началом координат. Сколько различных точек можно получить из неё, последовательно применяя симметрии относительно оси *Ox* и прямой $y=\sqrt{3}x$ (в любом порядке и любое количество раз)? Если саму точку тоже можно получить, её надо учитывать. Если для разных точек возможны разные ответы, укажите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 3; 6 | 3, 6 | 6; 3 | 6, 3

2. Дана точка на плоскости, не совпадающая с началом координат. Сколько различных точек можно получить из неё, последовательно применяя симметрии относительно оси *Ox* и прямой $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$ (в любом порядке и любое количество раз)? Если саму точку тоже можно получить, её надо учитывать. Если для разных точек возможны разные ответы, укажите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 12; 6 | 12, 6 | 6; 12 | 6, 12

3. Дана точка на плоскости, не совпадающая с началом координат. Сколько различных точек можно получить из неё, последовательно применяя симметрии относительно оси *Oy* и прямой $y=-x$ (в любом порядке и любое количество раз)? Если саму точку тоже можно получить, её надо учитывать. Если для разных точек возможны разные ответы, укажите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 4; 8 | 8, 4 | 8; 4 | 4, 8.

<u>Примеры записи ответов:</u>
9
9; 23

Задача 7. (3 балла)

1. Даны два квадратных трёхчлена со старшим коэффициентом $\frac{\sqrt{3}}{6}$. Вершины и точка пересечения их графиков образуют равносторонний треугольник. Найдите длину его стороны. Если возможных ответов несколько, выпишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 12

2. Даны два квадратных трёхчлена со старшим коэффициентом $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Вершины и точка пересечения их графиков образуют равносторонний треугольник. Найдите длину его стороны. Если возможных ответов несколько, выпишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 8

3. Даны два квадратных трёхчлена со старшим коэффициентом $\frac{\sqrt{3}}{8}$. Вершины и точка пересечения их графиков образуют равносторонний треугольник. Найдите длину его стороны. Если возможных ответов несколько, выпишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 16

Примеры записи ответов:
1/4
-0,25; 10

Задача 8. (3 балла)

1. *ABCDE* — пятиугольник, вписанный в окружность радиуса 12. Прямые *AE* и *BC* параллельны, *CD* = *DE*, *BE* = *AE* =16. Найдите косинус угла *DEC*.

Ответ: 2/3.

2. *ABCDE* — пятиугольник, вписанный в окружность радиуса 15. Прямые *AB* и *CD* параллельны, *AE* = *DE*, *AC* = *AB*=18. Найдите косинус угла *EDA*.

Ответ: 9/15 | 3/5 | 0,6

2. *ABCDE* — вписанный в окружность *S* пятиугольник. Прямые *DE* и *AB* параллельны, *BC* = *CD*, *AD* = *DE* =20, cos *CBD* = 5/8. Найдите радиус окружности *S*.

Ответ: 16.

Примеры записи ответов:
1/4
0,25
1

Задача 9. (4 балла)

1. *ABDE*, *BCEF*, *CDFA* — вписанные четырёхугольники с точками пересечения диагоналей *K*, *L* и *M* соответственно. Известно, что точка *K* лежит на отрезках *BL* и *AM*, точка *M* — на отрезке *CL*. Кроме того, *BK* = *LE* = *CM* = *MD* = 5, *KL* = 4, *LM* = 6. Найдите длину отрезка *MK*. Если возможных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 6

2. *ABDE*, *BCEF*, *CDFA* — вписанные четырёхугольники с точками пересечения диагоналей *K*, *L* и *M* соответственно. Известно, что точка *K* лежит на отрезках *BL* и *AM*, точка *M* — на отрезке *CL*. Кроме того, *BK* = *MK* = *ML* = 5, *MC* = 7, *AK* = *FL* = 6. Найдите длину отрезка *EL*. Если возможных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 5

3. *ABDE*, *BCEF*, *CDFA* — вписанные четырёхугольники с точками пересечения диагоналей *K*, *L* и *M* соответственно. Известно, что точка *K* лежит на отрезках *BL* и *AM,* точка *M* — на отрезке *CL*. Кроме того, *EL* = *FL* = *KL* = 5, *DM* = 4, *AK* = *MK* = 6. Найдите длину отрезка *MC*. Если возможных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 4

Примеры записи ответов:
1/4
0,25
4; 10

Задача 10. (4 балла)

1. На доске была написана формула дробно-линейной функции вида $f(x)=\frac{ax+b}{7x+3}$, где *a* и *b* — какие-то действительные числа (не обязательно различные). Вася поменял местами числа *a* и *b*, и оказалось, что теперь на доске написана формула обратной к *f*(*x*) функции. Найдите число *a.* Если возможных ответов несколько, запишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: -3.

2. На доске была написана формула дробно-линейной функции вида $f(x)=\frac{ax+4}{bx-5}$, где *a* и *b* — какие-то действительные числа (не обязательно различные). Вася поменял местами числа *a* и *b*, и оказалось, что теперь на доске написана формула обратной к *f*(*x*) функции. Найдите число *a.* Если возможных ответов несколько, запишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 5.

3. На доске была написана формула дробно-линейной функции вида $f(x)=\frac{ax+b}{cx+2}$, где *a, b* и *c* — какие-то действительные числа (не обязательно различные). Вася поменял местами числа *b* и *c*, и оказалось, что теперь на доске написана формула обратной к *f*(*x*) функции. Найдите число *a.* Если возможных ответов несколько, запишите их в любом порядке через точку с запятой.

Ответ: 2; -2 | 2, -2 | -2; 2

Примеры записи ответов:
1/4
-0,25; 10

9 класс

Задача 1. (1 балл)

1. На столе лежат палочки длиной 1, 2, 3, …, *n* сантиметров. Известно, что из них можно сложить 40 треугольников, использовав каждую палочку не более, чем по разу, а вот 41 уже нельзя. Найдите *n* (длину самой большой палочки). Если возможных ответов несколько, перечислите их в