7 класс
1 вариант

1. (2 балла) Аня и Коля собирали яблоки. Оказалось, что Аня собрала столько же яблок, сколько Коля собрал процентов от общего числа собранных ими яблок и наоборот, Коля собрал столько же яблок, сколько Аня собрала процентов от общего числа собранных ими яблок. Сколько яблок собрала Аня и сколько Коля?

Ответ: по 50 яблок.

Решение: Если сложить два имеющихся условия, получится, что суммарное количество яблок равно общему количеству процентов. Значит, всего Аня и Коля собрали ровно 100 яблок. Если бы кто-то из них собрал больше яблок, то он собрал бы и больше процентов. С другой стороны, из условия следует, что больше процентов собрал бы другой. Значит, оба собрали по 50 яблок.

2. (2 балла) У мальчика Васи в тетради были записаны два числа. Он уменьшил каждое из них на 1 и обнаружил, что произведение чисел осталось прежним. Найдите сумму исходных чисел.

Ответ: 1.

Решение:

Обозначим числа за x и y. Составим уравнение: $(x-1)(y-1)=xy$. Раскрыв скобки и убрав из обеих частей xy, получим, что $-x-y+1=0$. Значит, $x+y=1$.

3. (2 балла) Среди чисел от 1 до 56 000 – каких чисел больше – тех, которые делятся на 7, но не делятся на 8 или тех, которые делятся на 8?

Ответ: Одинаково.

Решение: Поскольку 56 000 нацело делится на 8, среди интересующих нас чисел на 8 делится в точности каждое восьмое число.

Поскольку 56 000 нацело делится на 7, среди интересующих нас чисел на 7 делится каждое седьмое число. Количество этих чисел делится на 8, значит ровно $\frac{7}{8}$ из них не делится на 8. Это составляет $\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{7}=\frac{1}{8}$ от общего числа.

Таким образом, тех чисел, которые делятся на 7, но не делятся на 8 и тех, которые делятся на 8, поровну.

4. (3 балла) Точка C находится на отрезке AE. По одну сторону от прямой AE отмечены точки B и D так, что ABC – равносторонний треугольник, а CDE – равнобедренный прямоугольный с прямым углом D. Оказалось, что треугольник BCD равнобедренный с основанием BC. Найдите угол ADE.

Ответ: 105°

Решение: Острые углы треугольника CDE равны 45° каждый, углы треугольника ABC равны по 60°. Значит, угол BCD составляет 75°. Следовательно, $\angle CBD=75^\circ$, $\angle CDB=30^\circ$.

Высоты треугольников ABC и BCD, опущенные на сторону BC пададют в её середину, а значит, являются продолжениями друг друга. Так как они являются ещё и биссектрисами, $\angle ADC=\frac{\angle BDC}{2}=15^\circ$.

Отсюда $\angle ADE=\angle ADC+\angle CDE=15^\circ+90^\circ=105^\circ$.

5. (3 балла) Петя и Вася играют в игру. Всего в игре три хода. Первым ходом Петя ломает палочку длиной 10 см на две части. Затем Вася ломает одну из получившихся палочек на две части. Последним ходом Петя ломает одну из трёх имеющихся палочек на две части. Вася выигрывает, если из каких-нибудь трёх получившихся частей можно составить треугольник, Петя – в противном случае. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ: Петя.

Решение: Первым ходом Петя ломает исходную палочку на две палочки по 5 см. Вася ломает одну из этих палочек на две части, имеющие длины a и b. Допустим, $a\geqslant b$. Тогда Петя ломает палочку длины b на две произвольные части c и d.

Отрезок 5 см равен сумме трёх оставшихся, поэтому не может входить в треугольник ни с каком парой остальных. Отрезок a не меньше суммы $c + d$, значит, из a, c и d треугольник также составить нельзя.

6. (3 балла) Дан ребус: АБ + ВГ + ДЕ = ЖЗИ. Разные буквы обозначают разные цифры, ни одна из цифр не равна 9, число не может начинаться с 0. Найдите наименьшее возможное значение числа ЖЗИ.

Ответ: 108.

Решение:

Сумма всех находящихся в нашем распоряжении цифр равна 36. Значит, АБ + ВГ + ДЕ + ЖЗИ делится на 9. Но АБ + ВГ + ДЕ + ЖЗИ = 2ЖЗИ, следовательно, ЖЗИ делится на 9.

Наименьшее трёхзначное число, делящееся на 9, это 108. Так как, например, $108 = 25+36+47$, это число нам подходит.

7. (4 балла) В турнире по волейболу участвуют 30 команд. Каждое утро организатор составляет расписание матчей на сегодня. Согласно этому расписанию, команды разбиваются на пары и играют по одному матчу. Каждый матч заканчивается победой одной из команд, ничьих не бывает.

Докажите, что как бы организатор ни составлял расписание, команды могут играть между собой так, что никогда не появится команда, проигравшая пять матчей подряд.

Решение: Чтобы гарантированно получить команду, проигравшую пять матчей подряд, надо свести в пару две команды, каждая из которых на данный момент имеет проигрышную серию не менее, чем из четырёх матчей подряд (то есть, ровно четыре). Чтобы за день до этого образовались две такие команды, необходимо было свести в две пары четыре команды каждая из которых имеет текущую проигрышную серию не менее, чем из трёх матчей. И т.д., за четыре дня до этого должно быть хотя бы 16 команд, имеющие текущую проигрышную серию не менее одного матча, т.е. проигравшие свои последние матчи.

Но каждый день у нас образуется ровно 15 команд-победителей и 15 команд-побеждённых. Значит, получить 16 команд-побеждённых невозможно.

8. (5 баллов) В клетках таблицы 5×7 расставлены числа 1, 2 и 3, так, что в любом квадрате 2×2 есть все три различных числа. Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 55

Решение:

Пример:

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
2 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 & 2\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
2 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 & 2\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}$$

Оценка:

Рассмотрим левый верхний квадрат 2×2 прямоугольника 5×7. В нём есть как минимум две не-единицы, и как минимум одна из них находится на стороне или в углу прямоугольника. Назовём эту клетку *отмеченной*. Рассмотрев остальные углы прямоугольника, получим всего не менее четырёх отмеченных клеток, т.е. клеток на границе прямоугольника, в которых написаны не единицы.

Левый верхний и правый нижний прямоугольники 4×6 не содержат общих отмеченных клеток, значит в каком-то из них содержится не более двух отмеченных клеток. Этот прямоугольник разбивается на квадраты 2×2, сумма чисел в каждом из которых не менее 7. Значит, всего в этом прямоугольнике общая сумма чисел не менее 42.

Вне этого прямоугольника 4×6 осталось 11 клеток, из которых не менее двух отмеченных. Сумма чисел в этих клетках не менее $9\cdot1+2\cdot2 = 13$. Итого получаем общую сумму не менее 55.

7 класс
2 вариант

1. (2 балла) Петя и Вася собирали грибы. Оказалось, что Петя собрал столько же грибов, сколько Вася собрал процентов от общего числа собранных ими грибов, и наоборот, Вася собрал столько же грибов, сколько Петя собрал процентов от общего числа собранных ими грибов. Сколько грибов собрал каждый из ребят?

Ответ: по 50 грибов.

2. (2 балла) У мальчика Васи в тетрадке были записаны два числа. Он увеличил каждое из них на 2 и обнаружил, что произведение чисел осталось прежним. Найдите сумму исходных чисел.

Ответ: -2.

3. (2 балла) Среди чисел от 1 до 72 000 – каких чисел больше – тех, которые делятся на 8, но не делятся на 9 или тех, которые делятся на 9?

Ответ: Одинаково.

4. (3 балла) Точка C находится на отрезке AE. По одну сторону от прямой AE отмечены точки B и D так, что CDE – равносторонний треугольник, а ABC – равнобедренный прямоугольный с прямым углом B. Оказалось, что треугольник BCD равнобедренный с основанием BC. Найдите угол ABE.

Ответ: $120°$

5. (3 балла) Полина и Василиса играют в игру. Всего в игре три хода. Первым ходом Полина ломает палочку длиной 10 см на две части. Затем Василиса ломает одну из получившихся палочек на две части. Последним ходом Полина ломает одну из трёх имеющихся палочек на две части. Полина выигрывает, из если каких-нибудь трёх получившихся частей можно составить треугольник, Василиса – в противном случае. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ: Полина.

6. (3 балла) Дан ребус: АБВ = ГД + ЕЖ + ЗИ. Разные буквы обозначают разные цифры, ни одна из цифр не равна 0. Найдите наибольшее возможное значение числа АБВ.

Ответ: 243.

7. (4 балла) В турнире по волейболу участвуют 60 команд. Каждое утро организатор составляет расписание матчей на сегодня. Согласно этому расписанию, команды разбиваются на пары и играют по одному матчу. Каждый матч заканчивается победой одной из команд, ничьих не бывает.

Докажите, что как бы организатор ни составлял расписание, команды могут играть между собой так, что никогда не появится команда, выигравшая шесть матчей подряд.

8. (5 баллов) В клетках таблицы 5×9 расставлены числа 1, 2 и 3, так, что в любом квадрате 2×2 есть все три различных числа. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 109