Отборочный этап олимпиады «Покори Воробьёвы горы!» по математике длился 24 часа. Он состоял из блиц-тура (6 задач, ответы к которым нужно отправить в течение 3 часов) и творческой части (3 задачи, полное решение которых нужно отправить в течение оставшегося времени).

Отборочный этап. Блиц-тур

Каждый участник блиц-тура получал свой набор задач, отличающийся от наборов задач других участников. Приводим типичный набор из шести задач блиц-тура.

---

1. Решите неравенство $\frac{\sqrt{\frac{x}{\gamma}+(\alpha+2)}-\frac{x}{\gamma}-\alpha}{x^2+ax+b} \geqslant 0$.

В ответе укажите число, равное количеству целых корней данного неравенства. Если целых корней нет, либо корней бесконечно много, в бланке ответов укажите цифру 0.

$$\alpha=3, \gamma=1, a=-15, b=54.$$

Ответ: 7.

Решение. С учетом заданных числовых значений, решаем неравенство:

$$\frac{\sqrt{x+5}-x-3}{x^2-15x+54} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+5}-x-3}{(x-6)(x-9)} \geqslant 0.$$

Так как $\sqrt{x+5} \geqslant x+3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} -5 \leqslant x \leqslant -3, \\ x+5 \geqslant (x+3)^2, \end{array}\right.$ то выражение в числителе неотрицательно при $x \in [-5;\ -1]$, и отрицательно при $x>-1$.

Также справедливо $x^2-15x+54<0$ при $x \in (6;\ 9)$, а иначе это выражение неотрицательно.

Поэтому $x \in [-5;\ -1] \bigcup (6; 9)$, и целых корней будет 5 + 2 = 7.

---

2. Решите уравнение $\cos 2x+\cos 6x+2\sin^2 x=1$.

В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку A, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

$$A=\left[\frac{m\pi}{6}; \frac{(m+1)\pi}{6}\right], m=5.$$

Ответ: 2,88 (точное значение: $\frac{11\pi}{12}$).

Решение. Поскольку $\cos 2x+2\sin^2 x=1$, то исходное уравнение равносильно $\cos 6x=0$. Из всех корней серии $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{6}$ на отрезок $A=\left[\frac{5\pi}{6};\ \pi\right]$ попадает один корень $x=\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{6}=\frac{11\pi}{12}$.

---

3. Из точки M, лежащей внутри треугольника ABC, на стороны BC, AC, AB проведены перпендикуляры, длины которых равны k, l и m соответственно. Найдите площадь треугольника ABC, если $\angle CAB=\alpha$ и $\angle ABC=\beta$. В случае, если ответ будет нецелым, округлите его до ближайшего целого.

$$\alpha=\frac{\pi}{6}, \beta=\frac{\pi}{4}, k=3, l=2, m=4.$$

Ответ: 67.

Решение. Обозначив стороны треугольника через a, b, c, с помощью теоремы синусов получим $S = \frac{ka+lb+mc}{2} = R\,(k\sin\alpha + l\sin\beta + m\sin\gamma)$.

Так как, кроме того, $S = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$, то можем выразить $R = \frac{k\sin\alpha+l\sin\beta+m\sin\gamma}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$.

Поэтому $S = \frac{(k\sin\alpha+l\sin\beta+m\sin\gamma)^2}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$.

После подстановки числовых значений k, l, m, α, β, γ получаем

$$S = \frac{(3\sin\alpha + 2\sin\beta + 4\sin\gamma)^2}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} = \frac{\left(3 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{6}\right)^2}{\sqrt{3}+1} \approx 67.$$

---

4. Решите систему

$$\begin{cases} x^3 + 3y^3 = 11, \\ x^2y + xy^2 = 6. \end{cases}$$

Вычислите значения выражения $\frac{x_k}{y_k}$ для каждого решения (x_k, y_k) системы и найдите среди них минимальное. В ответе укажите найденное минимальное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: $-1,31$ (точное значение: $-\frac{1+\sqrt{217}}{12}$).

Решение. Умножим первое уравнение на 6, второе на (-11) и сложим:

$$6x^3 - 11x^2y - 11xy^2 + 18y^3 = 0.$$

Поделив обе части на y^3 и обозначив $t = \frac{x}{y}$, получим:

$$6t^3 - 11t^2 - 11t + 18 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(6t^2 + t - 9) = 0.$$

Отсюда $t_1 = 2$, $t_{2,3} = \frac{-1\pm\sqrt{217}}{12}$.

Минимальное значение $\frac{x_k}{y_k}$ равно $-\frac{1+\sqrt{217}}{12} \approx -1,31$.

---

5. Имеется два сплава. Первый сплав содержит p % примесей, а второй – соответственно q % примесей. Определите, в какой пропорции следует соединить эти сплавы, чтобы получился новый сплав, в котором содержится r % примесей. В ответе укажите отношение массы первого сплава к массе второго в виде десятичной дроби, округлив ее при необходимости до двух знаков после запятой.

$p = 70$, $q = 5$, $r = 40$.

Ответ: 1,17 (точный ответ: $\frac{7}{6}$).

Решение. Пусть масса второго сплава равна a (кг, г, т или любая другая единица массы), а масса первого равна $x \cdot a$ (тех же единиц). Тогда x есть искомая величина.

По условию задачи масса всех примесей равна $\frac{xa\cdot p}{100} + \frac{a\cdot q}{100}$. С другой стороны, эта же масса равна $\frac{(xa+a)\cdot r}{100}$. Значит, $\frac{xa\cdot p}{100} + \frac{a\cdot q}{100} = \frac{(xa+a)\cdot r}{100} \Leftrightarrow x\cdot p + q = (x+1)\cdot r \Leftrightarrow x = \frac{r-q}{p-r}$.

При данных числовых значениях $x = \frac{40-5}{70-40} = \frac{7}{6} \approx 1,17$.

---

6. Найдите все целые значения a, не превосходящие по абсолютной величине 15, при каждом из которых неравенство

$$\frac{4x - a - 4}{6x + a - 12} \leqslant 0$$

выполняется при всех x из промежутка $[2;\ 3]$. В ответе укажите сумму всех таких a.

Ответ: -7.

Решение. Решая неравенство методом интервалов, получим, что его левая часть равна 0 при $x = 1 + \frac{a}{4}$ и не определена при $x = 2 - \frac{a}{6}$. Эти два значения совпадают при $a = \frac{12}{5}$. В этом случае неравенство решений не имеет.

При $a > \frac{12}{5}$ решением неравенства является промежуток $\left(2 - \frac{a}{6};\ 1 + \frac{a}{4}\right]$, и неравенство выполняется при всех $x \in [2;\ 3]$, если $\begin{cases} 2 - \frac{a}{6} < 2, \\ 3 \leqslant 1 + \frac{a}{4} \end{cases} \Leftrightarrow a \geqslant 8.$

При $a < \frac{12}{5}$ решением неравенства является промежуток $\left[1 + \frac{a}{4};\ 2 - \frac{a}{6}\right)$, и неравенство выполняется при всех $x \in [2;\ 3]$, если $\begin{cases} 1 + \frac{a}{4} \leqslant 2, \\ 3 < 2 - \frac{a}{6} \end{cases} \Leftrightarrow a < -6.$

Поэтому $a \in (-\infty;\ -6) \bigcup [8;\ +\infty)$, и искомые значения: $a \in [-15;\ -6) \bigcup [8;\ 15]$. Сумма целых значений:

$$-15 - 14 - 13 - ... - 8 - 7 + 8 + 9 + ... + 14 + 15 = -7.$$

Набор творческих задач.

I. Найдите все не превосходящие 100 натуральные значения n, при которых сумма $1^2+2^2+3^2+...+n^2$ делится на 50. Расположите эти значения n в порядке возрастания: $n_1 < n_2 < ... < n_k$. В ответе укажите n_4.

Решение. Так как $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, то $n(n+1)(2n+1)$ должно делиться на $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$. Так как числа n, $n+1$ и $2n+1$ взаимно просты, то одно из них должно делиться на 25.

- Если n делится на 25, то $n = 25$, 50, 75 или 100. При подстановке этих значений в выражение получаем, что делимость будет при $n = 75$ и при $n = 100$.
- Если $n+1$ делится на 25, то $n = 24$, 49, 74 или 99. При подстановке этих значений в выражение получаем, что делимость будет при $n = 24$ и при $n = 99$.
- Если $2n+1$ делится на 25 и при этом нечетно, то $n = 12$, 37, 62 или 87. При подстановке этих значений в выражение получаем, что делимость будет при $n = 12$ и при $n = 87$.

Таким образом, подходят значения 12, 24, 75, 87, 99, 100. Четвёртым из них является 87.

Ответ: 87.

□

1. В ответе укажите n_4.
Ответ: 87.
2. В ответе укажите n_5.
Ответ: 99.
3. В ответе укажите n_{k-2}.
Ответ: 87.
4. В ответе укажите n_{k-3}.
Ответ: 75.
5. В ответе укажите $n_1 + n_5$.
Ответ: 111.
6. В ответе укажите $n_2 + n_6$.
Ответ: 124.
7. В ответе укажите $n_3 + n_5$.
Ответ: 174.
8. В ответе укажите $n_2 + n_{k-1}$.
Ответ: 123.
9. В ответе укажите $n_{k-3} + n_{k-5}$.
Ответ: 87.
10. В ответе укажите $n_1 + n_{k-4}$.

Ответ: 36.

II. Среди всех треугольников, вписанных в окружность фиксированного радиуса, с известной суммой квадратов всех углов ($\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\pi^2/2$), найдите все треугольники максимально возможной площади. Для каждого такого треугольника найдите наименьшее значение из всех попарных произведений углов. В ответ запишите наименьшее из этих значений, при необходимости округлив до двух знаков после запятой. Все углы выражаются в радианах.

Решение. Решаем задачу нахождения максимума площади $S=2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$, с ограничениями $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\pi^2/2$, α, β, $\gamma>0$, Упорядочим углы: $\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$.

Покажем, что в нашем случае треугольник либо тупоугольный, либо прямоугольный, откуда будет вытекать, что $\alpha+\beta\leqslant\pi/2$. Действительно,

$$\frac{\pi^2}{2}=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\leqslant(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\gamma=\pi\cdot\gamma\Longrightarrow\gamma\geqslant\frac{\pi}{2}.$$

Исключив γ из условия $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ и подставив в $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\pi^2/2$, получаем $\alpha^2+\beta^2+(\pi-\alpha-\beta)^2=\pi^2/2$ или

$$3(\alpha+\beta)^2-4\pi(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)^2+\pi^2=0.$$

Введём обозначение $x=\alpha+\beta$ и $y=\alpha-\beta$. Тогда $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$, $y\leqslant0$ и справедливо

$$3\Big(x-\frac{2\pi}{3}\Big)^2+y^2=\frac{\pi^2}{3},\quad x\in\Big[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\Big],\quad y\in\Big[-\frac{\pi}{\sqrt3};0\Big].\tag{1}$$

Здесь ограничения снизу на x и y взяты из уравнения (1) поскольку, в частности, из него вытекают неравенства $\left|x-\frac{2\pi}{3}\right|\leqslant\frac{\pi}{3}$ и $|y|\leqslant\frac{\pi}{\sqrt3}$. Неравенство $x=\alpha+\beta\leqslant\pi/2$ обосновано выше. Отметим, что из (1) можно найти явный вид $x(y)=\frac{2\pi}{3}-\sqrt{\frac{\pi^2}{9}-\frac{y^2}{3}}$.

Из уравнения (1) найдем производную функцию $x(y)$

$$x'(y)=\frac{y}{2\pi-3x},\quad y\in\Big[-\frac{\pi}{\sqrt3};0\Big].$$

Заметим, что $x'(y)\leqslant0$ для рассматривымаемых y. Вернемся к экстремальной задаче

$$S=2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=R^2(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))\sin(\pi-\alpha-\beta)=$$
$$=R^2(\cos(y)-\cos(x))\sin(x)\mapsto\max.$$

Обозначим $f(y)=(\cos(y)-\cos(x(y)))\sin(x(y))$ и покажем, что максимум данной функции на отрезке $y\in\left[-\frac{\pi}{\sqrt3};0\right]$ достигается в точке 0. Это и будет означать, что экстремальным является ранобедренный треугольник. Для этого достаточно доказать, что $f'(y)\geqslant0$ для рассматриваемых аргументов y. Справедливы (в дальнейшем, для краткости мы будем писать x вместо $x(y)$) соотношения:

$$f'(y)=-\sin y\sin(x)+x'(y)(\cos x\cos(y)-\cos(2x))\geqslant\frac{2x}{\pi}\cdot\frac{-2y}{\pi}+x'(y)(\cos x-\cos(2x))=$$
$$=\frac{4x\cdot(-y)}{\pi^2}+\frac{y(\cos x-\cos(2x))}{2\pi-3x}=\frac{(-y)}{2\pi-3x}\Big(\frac{4x(2\pi-3x)}{\pi^2}+\cos(2x)-\cos(x)\Big).$$

Здесь при получении неравенства мы использовали неравенство $\sin x\geqslant\frac{2x}{\pi}$, которое вытекает из выпуклости функции $\sin x$ на отрезке $x\in[0;\pi/2]$ и аналогичное неравенство $\sin(-y)\geqslant\frac{2(-y)}{\pi}$ на отрезке $y\in[-\pi/2;0]$, а также воспользовались неравенством $\cos y\leqslant1$.

Поскольку в нашем случае $\frac{(-y)}{2\pi-3x}\geqslant0$ для $x\in\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$, $y\in\left[-\frac{\pi}{\sqrt3};0\right]$, то для завершения доказательства $f'(y)\geqslant0$ для рассматриваемых y достаточно доказать, что

$$g(x)=\frac{4x(2\pi-3x)}{\pi^2}+\cos(2x)-\cos(x)\geqslant0,\quad\forall x\in\Big[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\Big].\tag{2}$$

Предположим, что данное неравенство доказано (доказательсво будет дано ниже). Тогда отсюда вытекает, что функция $f(y)$ достигает своё наибольшее значение в нуле, а следовательно $\alpha = \beta$, т.е. треугольник равнобедренный.

Таким образом, вернувшись к исходным переменным, приходим к уравнению:

$$\alpha^2 + \alpha^2 + (\pi - 2\alpha)^2 = \frac{\pi^2}{2}.$$

Решив уравнение, находим: $\alpha = \frac{\pi}{6}$ и $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Возможен только первый вариант, поскольку α угол в треугольнике с наименьшим значением. Откуда $\alpha = \beta = \frac{\pi}{6}$, $\gamma = \frac{2\pi}{3}$. Следовательно, наименьшее значение из всех возможных попарных произведений углов равно $\pi^2/36 \approx 0,27$.

Ответ: $0,27$. □

Доказательство неравенства (2). Далее все неравенства будем рассматривать только на отрезке $x \in A = \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$. Покажем, что $g'(x) = \frac{4(2\pi - 6x)}{\pi^2} - 2\sin(2x) + \sin(x) \leqslant 0$ и монотонно растёт на множестве A. Это будет вытекать из очевидного неравенства $g'(\pi/2) > 0$ и того факта, что $g''(x) = \frac{(-24x)}{\pi^2} - 4\cos(2x) + \cos(x) \geqslant 0$ на отрезке A. Докажем этот факт.

Рассмотрим производную от функции $g''(x)$. Имеем $g'''(x) = 8\sin 2x - \sin x = \sin x(16\cos x - 1)$ откуда делаем вывод, что на отрезке A функция $g'''(x)$ положительна до точки $x^* = \arccos(1/16)$, а потом отрицательна. Следовательно $g''(x) \geqslant \min\{g''(\pi/3), g''(\pi/2)\} \geqslant g''(\pi/3) > 0$.

Ткаким образом функция $g(x)$ монотонно убывает и достигает своего минимума в точке $\pi/2$. Поэтому $g(x) \geqslant g(\pi/2) = 0$ для всех $x \in A$. Неравенство (2) доказано.

II. Среди всех треугольников, вписанных в окружность фиксированного радиуса, с известной суммой квадратов всех углов ($\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 9\pi^2/25$), найдите все треугольники максимально возможной площади. Для каждого такого треугольника найдите наименьшее значение из всех попарных произведений углов. В ответ запишите наименьшее из этих значений, при необходимости округлив до двух знаков после запятой. Все углы выражаются в радианах.

Решение. Приведём здесь наводящие соображения, которые показывают, как можно догадаться до правильного ответа в задаче, решённой выше.

Если зафиксировать радиус описанной окружности и один из углов треугольника (например, угол α), то максимальную площадь будет иметь равнобедренный треугольник с углами α, $\beta = \gamma = \frac{\pi - \alpha}{2}$.

Действительно, если известен радиус R и угол α, то тем самым мы знаем сторону треугольника $a = 2R\sin\alpha$. Среди всех треугольников с данным основанием и углом α при вершине максимальную площадь имеет треугольник с максимальной высотой, проведённой к основанию a, то есть равнобедренный треугольник (рис. 1).

Таким образом приходим к уравнению:

$$\alpha^2 + \left(\frac{\pi - \alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\pi - \alpha}{2}\right)^2 = \frac{9\pi^2}{25}.$$

Решив уравнение, находим: $\alpha = \frac{\pi}{5}$ и $\alpha = \frac{7\pi}{15}$. Следовательно, возможны варианты треугольников с углами: $\alpha = \frac{\pi}{5}$, $\beta = \gamma = \frac{2\pi}{5}$ и $\alpha = \frac{7\pi}{15}$, $\beta = \gamma = \frac{4\pi}{15}$. Следовательно наименьшее значение из всех возможных попарных произведений углов равно $16\pi^2/225 \approx 0,70$.

Ответ: $0,70$. □

Общая формулировка

II. Среди всех треугольников, вписанных в окружность фиксированного радиуса, с известной суммой квадратов всех углов ($\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = C$), найдите все треугольники максимально возможной

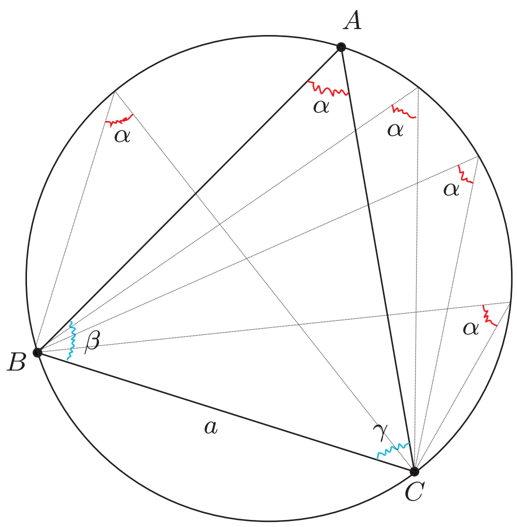

Рис. 1:

площади. Для каждого такого треугольника найдите наименьшее значение из всех попарных произведений углов. В ответ запишите наименьшее из этих значений, при необходимости округлив до двух знаков после запятой. Все углы выражаются в радианах.

2.1. $C = 9\pi^2/25$. **Ответ:** $0,70$. Точный ответ $16\pi^2/225$.

2.2. $C = 17\pi^2/49$. **Ответ:** $0,81$. Здесь $\frac{3\pi}{7}$, $\frac{2\pi}{7}$, $\frac{2\pi}{7}$. Второй треугольник с $\frac{5\pi}{21}$, $\frac{8\pi}{21}$, $\frac{8\pi}{21}$ дает больше величину. Точный ответ $4\pi^2/49$.

2.3. $C = 27\pi^2/49$. **Ответ:** $0,20$. Здесь $\frac{5\pi}{7}$, $\frac{\pi}{7}$, $\frac{\pi}{7}$. Второй треугольник с $\beta = \frac{11\pi}{21}$ не существует. Точный ответ $\pi^2/49$.

2.4. $C = 11\pi^2/27$. **Ответ:** $0,49$. Здесь $\alpha = \frac{5\pi}{9}$, $\frac{2\pi}{9}$, $\frac{2\pi}{9}$. Второй треугольник с $\alpha = \frac{\pi}{9}$, $\frac{4\pi}{9}$, $\frac{4\pi}{9}$ тоже дает. Точный ответ $4\pi^2/81$.

2.5. $C = 51\pi^2/81$. **Ответ:** $0,12$. Здесь $\alpha = \frac{7\pi}{9}$, $\beta = \frac{\pi}{9}$. Второй треугольник не существует. Точный ответ $\pi^2/81$.

2.6. $C = 83\pi^2/121$. **Ответ:** $0,08$. Здесь $\alpha = \frac{9\pi}{11}$, $\beta = \frac{\pi}{11}$. Второй треугольник не существует. Точный ответ $\pi^2/121$.

2.7. $C = 4\pi^2/121$. **Ответ:** $0,33$. Здесь $\frac{7\pi}{11}$, $\frac{2\pi}{11}$, $\frac{2\pi}{11}$. Второй треугольник с $\alpha = \frac{1\pi}{33}$, $\beta = \frac{16\pi}{33}$, $\frac{16\pi}{33}$ хуже. Точный ответ $16\pi^2/33^2$.

Тут опечатка была: (это с опечаткой) $C = 57\pi^2/121$. **Ответ:** $0,15$. Здесь $\alpha = \frac{1\pi}{33}$, $\beta = \frac{16\pi}{33}$, $\frac{16\pi}{33}$. Второй треугольник с $\frac{7\pi}{11}$, $\frac{2\pi}{11}$, $\frac{2\pi}{11}$ хуже. Точный ответ $16\pi^2/33^2$.

2.8. $C = 43\pi^2/121$. **Ответ:** $0,73$. Здесь $\alpha = \frac{5\pi}{11}$, $\frac{3\pi}{11}$, $\frac{3\pi}{11}$. Второй треугольник с $\frac{13\pi}{33}$, $\frac{13\pi}{33}$, $\frac{7\pi}{33}$ произведение углов больше. Точный ответ $9\pi^2/121$.

2.9. $C = 123\pi^2/169$. **Ответ:** $0,06$. Здесь $\alpha = \frac{11\pi}{13}$, $\beta = \frac{\pi}{13}$. Второй треугольник с $\frac{23\pi}{39}$, $\frac{23\pi}{39}$ не существует. Точный ответ $\pi^2/169$.

2.10. $C = 89\pi^2/169$. **Ответ:** $0,23$. Здесь $\alpha = \frac{9\pi}{13}$, $\beta = \frac{2\pi}{13}$. Второй треугольник с $\beta = \frac{42\pi}{65}$ не существует. Точный ответ $4\pi^2/169$.

2.11. $C = 67\pi^2/169$. **Ответ:** $0,53$. Здесь $\alpha = \frac{7\pi}{13}$, $\beta = \frac{3\pi}{13}$. Второй треугольник с $\frac{5\pi}{39}$, $\frac{17\pi}{39}$, $\frac{17\pi}{39}$ Точный ответ $9\pi^2/169$.

2.12. $C = 17\pi^2/24$. **Ответ:** $0,07$. Здесь $\alpha = \frac{5\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{12}$. Второй треугольник с $\beta = \frac{43\pi}{60}$ не существует. Точный ответ $\pi^2/144$.

2.13. $C = 11\pi^2/25$. **Ответ:** $0,31$. Здесь $\frac{1\pi}{15}$, $\frac{7\pi}{15}$, $\frac{7\pi}{15}$. Второй треугольник с $\frac{3\pi}{5}$, $\frac{\pi}{5}$, $\frac{\pi}{5}$ хуже. Точный ответ $7\pi^2/225$.

2.14. $C = \pi^2/2$. **Ответ:** $0,27$. Здесь $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{6}$. Второй треугольник с $\beta = \frac{19\pi}{30}$ не существует. Точный ответ $\pi^2/36$.

2.15. $C = 19\pi^2/32$. **Ответ:** $0,15$. Здесь $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{8}$. Второй треугольник с $\beta = \frac{27\pi}{40}$ не существует. Точный ответ $\pi^2/64$.

III. Найдите все пары положительных чисел x, y, удовлетворяющих равенству

$$\frac{4x^2y+6x^2+2xy-4x}{3x-y-2}+\sin\left(\frac{3x^2+xy+x-y-2}{3x-y-2}\right)=2xy+y^2+\frac{x^2}{y^2}+\frac{2x}{y}+$$
$$+\frac{2xy(x^2+y^2)}{(3x-y-2)^2}+\frac{1}{(x+y)^2}\left(x^2\sin\frac{(x+y)^2}{x}+y^2\sin\frac{(x+y)^2}{y^2}+2xy\sin\frac{(x+y)^2}{3x-y-2}\right).$$

В ответ запишите сумму величин x^2+y^2 по всем полученным парам решений (x, y) при необходимости округлив до двух знаков после запятой. Если решений нет, то запишите -1, если решений бесконечно много то -2.

Решение. Предложенное уравнение переписывается в виде

$$f(\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3)=\alpha_1f(u_1)+\alpha_2f(u_2)+\alpha_3f(u_3),$$

где

$$\alpha_1=\frac{x^2}{(x+y)^2},\alpha_2=\frac{y^2}{(x+y)^2},\alpha_3=\frac{2xy}{(x+y)^2},\quad \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1,\quad \alpha_1>0,\alpha_2>0,\alpha_3>0\ \forall x,y>0;$$

$$u_1=\frac{(x+y)^2}{x},u_2=\frac{(x+y)^2}{y^2},u_3=\frac{(x+y)^2}{3x-y-2},$$

а функция $f(t)=t^2+\sin t$ – строго выпуклая на всей числовой оси. По неравенству Йенсена, такое равенство возможно, только если $u_1=u_2=u_3$, откуда имеем с учетом $x>0, y>0$

$$x=y^2=3x-y-2\ \Rightarrow\ 2y^2-y-2=0\ \Rightarrow\ y=\frac{1+\sqrt{17}}{4},x=\frac{9+\sqrt{17}}{8}.$$

Поэтому $x^2+y^2=\frac{85+13\sqrt{17}}{32}=4,331\dots$

Ответ: 4,33

III.1 Найдите все пары положительных чисел x, y, удовлетворяющих равенству

$$\frac{4x^2y+6x^2+2xy-4x}{3x-y-2}+\sin\left(\frac{3x^2+xy+x-y-2}{3x-y-2}\right)=2xy+y^2+\frac{x^2}{y^2}+\frac{2x}{y}+$$
$$+\frac{2xy(x^2+y^2)}{(3x-y-2)^2}+\frac{1}{(x+y)^2}\left(x^2\sin\frac{(x+y)^2}{x}+y^2\sin\frac{(x+y)^2}{y^2}+2xy\sin\frac{(x+y)^2}{3x-y-2}\right).$$

В ответ запишите сумму величин x^2+y^2 по всем полученным парам решений (x, y) при необходимости округлив до двух знаков после запятой. Если решений нет, то запишите -1, если решений бесконечно много то -2.

Ответ: 4,33

III.2 Найдите все пары положительных чисел x, y, удовлетворяющих равенству

$$\frac{2x^2+14xy-4y^2+2xy^2-12y}{2x-y-3}+\cos\left(\frac{x^2+4xy-2y^2-7y+2x-3}{2x-y-3}\right)=\frac{x^2}{y^2}+\frac{2y^3}{x}+\frac{2x}{y}+$$
$$+\frac{xy(xy+2x^2)}{(2x-y-3)^2}+\frac{1}{(x+y)^2}\left(x^2\cos\frac{(x+y)^2}{2x-y-3}+2xy\cos\frac{(x+y)^2}{x}+y^2\cos\frac{(x+y)^2}{y^2}\right).$$

В ответ запишите сумму величин x^2+y по всем полученным парам решений (x, y) при необходимости округлив до двух знаков после запятой. Если решений нет, то запишите -1, если решений бесконечно много то -2.

Ответ: $16 + 4\sqrt{13} \approx 30,42$
Решения $x = (7 + \sqrt{13})/2$, $y = (1 + \sqrt{13})/2$.

III.3 Найдите все пары положительных чисел x, y, удовлетворяющих равенству

$$\frac{14xy + 4y^2 - 2x^2y - 8y}{x + 2y - 4} + \cos\left(\frac{2y^2 + 3xy + x - 2y - 4}{x + 2y - 4}\right) = \frac{y^2}{x^2} + \frac{2y}{x} + x^2 + \\ + \frac{2xy(x^2 + y^2)}{(x + 2y - 4)^2} + \frac{1}{(x + y)^2}\left(x^2 \cos\frac{(x + y)^2}{x^2} + y^2 \cos\frac{(x + y)^2}{y} + 2xy \cos\frac{(x + y)^2}{x + 2y - 4}\right).$$

В ответ запишите сумму величин $x + y^2$ по всем полученным парам решений (x, y) при необходимости округлив до двух знаков после запятой. Если решений нет, то запишите -1, если решений бесконечно много то -2.

Ответ: $24 - 4\sqrt{17} \approx 7,51$
Решения $x = (\sqrt{17} - 1)/2$, $y = (9 - \sqrt{17})/2$.

III.4 Найдите все пары положительных чисел x, y, удовлетворяющих равенству

$$\frac{6xy^2 - 6x^2y + 12x^2 + 2y^2 - 10xy + 12x}{3x - y + 3} + \sin\left(\frac{6x^2 - 2xy + y^2 + 9x - y + 3}{3x - y + 3}\right) = \frac{y^2}{x^2} + \frac{2x^3}{y} + \frac{2y}{x} + \\ + \frac{xy(xy + 2y^2)}{(3x - y + 3)^2} + \frac{1}{(x + y)^2}\left(x^2 \sin\frac{(x + y)^2}{x^2} + 2xy \sin\frac{(x + y)^2}{y} + y^2 \sin\frac{(x + y)^2}{3x - y + 3}\right).$$

В ответ запишите сумму величин $x + 2y$ по всем полученным парам решений (x, y) при необходимости округлив до двух знаков после запятой. Если решений нет, то запишите -1, если решений бесконечно много то -2.

Ответ: $6 + \sqrt{33} \approx 11,74$
Решения $x = (3 + \sqrt{33})/4$, $y = (21 + 3\sqrt{33})/8$.