Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников
«Покори Воробьевы горы»
по математике

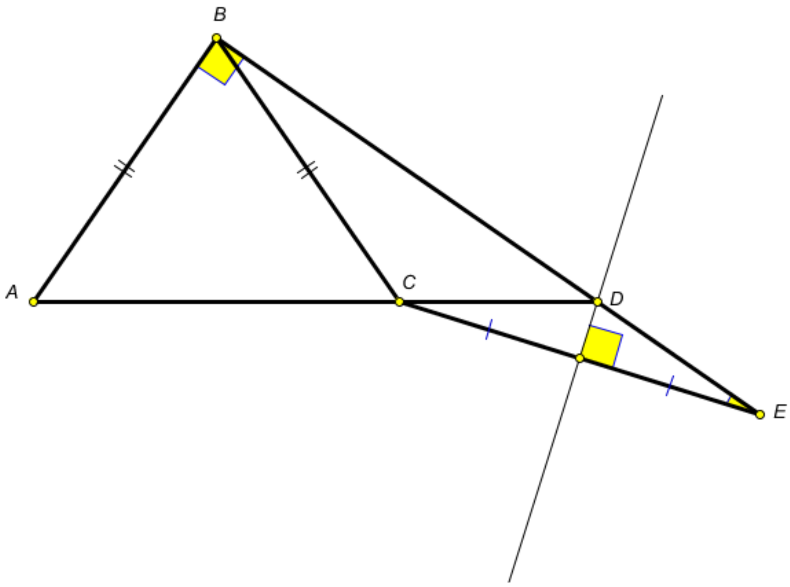
Задания заочного этапа 2020/2021 учебного года для 9 класса

1) Петя пошел в лес по грибы и, конечно же, взял с собой smart-часы со встроенным компасом, шагомером и транспортиром. Петя заметил, что, когда он входил в лес между 8 и 9 часами утра, угол между часовой и минутной стрелкой составил ровно 72°. А когда он выходил из леса между 13 и 14 часами, угол тоже был ровно 72°. Сколько минут Петя провел в лесу, если известно, что это число минут - целое?

2) В выражении $0 * 1 * 2 * 3 * \ldots * 99$ вместо «звездочек» можно ставить знаки «+» или «-». Сколько различных положительных чисел можно получить таким образом?

3) На окружности отмечена точка A. Построили правильный 3-угольник, 4-угольник,…, 10-угольник, вписанные в эту окружность и имеющие точку A одной из вершин. Все вершины этих многоугольников покрасили в красный цвет. Найдите, сколько получилось различных красных точек на окружности?

4) Треугольник $ABC -$ равнобедренный, $AB = BC$. На продолжении стороны AC за точку C выбрана точка D, такая, что $\angle ABD = 90^\circ$. Из множества точек E, обладающих тем свойством, что точка D принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку CE, выбрали ту, которая находится на максимальном расстоянии от точки B. Найдите угол $\angle CED$, если известно, что $\angle ABC = 80^\circ$.



5) Какое наименьшее значение может принимать сумма $x + y + z$ при условиях:

$$\begin{cases} x + 2y \geq 5 \\ y + 3z \geq 6? \\ x, y, z \geq 0 \end{cases}$$

Ответ округлите до сотых по стандартным математическим правилам.

6) Известно, что квадратные трехчлены $x^2 + p_1x + q_1$ и $x^2 + p_2x + q_2$ с целыми коэффициентами p_1, q_1, p_2, q_2 имеют корни и все их корни являются положительными целыми числами.

Пусть $(x^2 + p_1x + q_1) \cdot (x^2 + p_2x + q_2) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Найдите наименьшее возможное значение коэффициента *b* при этих условиях.

7. Дана последовательность положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_{10}$, удовлетворяющих соотношению $a_n(a_{n-1} + a_{n+1}) = 2a_{n-1}a_{n+1}(a_n + 1)$ при $n = 2,3, \dots, 9$. Найдите a_5 если известно, что $a_1 = 1$ и $a_{10} = 0{,}01$.