Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников
«Покори Воробьевы горы»
по математике

Задания заочного этапа 2020/2021 учебного года для 9 класса

1) Петя пошел в лес по грибы и, конечно же, взял с собой smart-часы со встроенным компасом, шагомером и транспортиром. Петя заметил, что, когда он входил в лес между 8 и 9 часами утра, угол между часовой и минутной стрелкой составил ровно 72°. А когда он выходил из леса между 13 и 14 часами, угол тоже был ровно 72°. Сколько минут Петя провел в лесу, если известно, что это число минут - целое?

Решение: Пусть Петя зашел в лес в 8ч. x мин. Угол поворота часовой стрелки (относительно отметки 12) составит $240+\frac{x}{2}$, а угол поворота минутной - $6x$. Составим уравнение $|\,240+\frac{x}{2}-6x|=72$. Его решения $x=30\frac{6}{11}$ и $x=56\frac{8}{11}$. Аналогично для момента выхода 13ч. y мин. составим уравнение $|30+\frac{y}{2}-6y|=72$ и решим его: $y=18\frac{6}{11}$ (второй корень отрицательный). Чтобы количество минут, проведенных в лесу, было целым, выбираем $x=30\frac{6}{11}$. **Ответ: 288**

2) В выражении $0*1*2*3*\ldots*99$ вместо «звездочек» можно ставить знаки «+» или «-». Сколько различных положительных чисел можно получить таким образом?

Решение: Если везде поставить знак «+», то получится 4950. В выражение входят 50 четных и 50 нечетных чисел, поэтому результат всегда будет четным. Докажем, что можно получить любое четное. Предположим, что $2k+2$ получить можно, а $2k$ - нельзя. Рассмотрим выражение, равное $2k+2$. Если 1 входит со знаком «+», то поменяем на «-» и получим на 2 меньше. Если 1 входит со знаком «-», а 2 - со знаком «+» - поменяем знаки у обоих, и т.д. Все числа не могут входить со знаком «-», т.к. результат будет отрицательный.

В итоге получим все **2475** четных числа от 1 до 45. **Ответ: 2475**

3) На окружности отмечена точка *А*. Построили правильный 3-угольник, 4-угольник,…, 10-угольник, вписанные в эту окружность и имеющие точку *А* одной из вершин. Все вершины этих многоугольников покрасили в красный цвет. Найдите, сколько получилось различных красных точек на окружности?

Решение: Поставим каждой точке X на окружности в соответствие число из интервала $[0,1)$ следующим образом: Возьмем расстояние, которое надо пройти по окружности из точки А против часовой стрелки, чтобы попасть в X и поделим его на длину окружности. Например, вершинам правильного треугольника будут соответствовать числа $0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}$. Для удобства добавим ‘1-угольник» - точку А (ей соответствует 0) и «2-угольник» - точку А и диаметрально противоположную ей (ей соответствует ½)

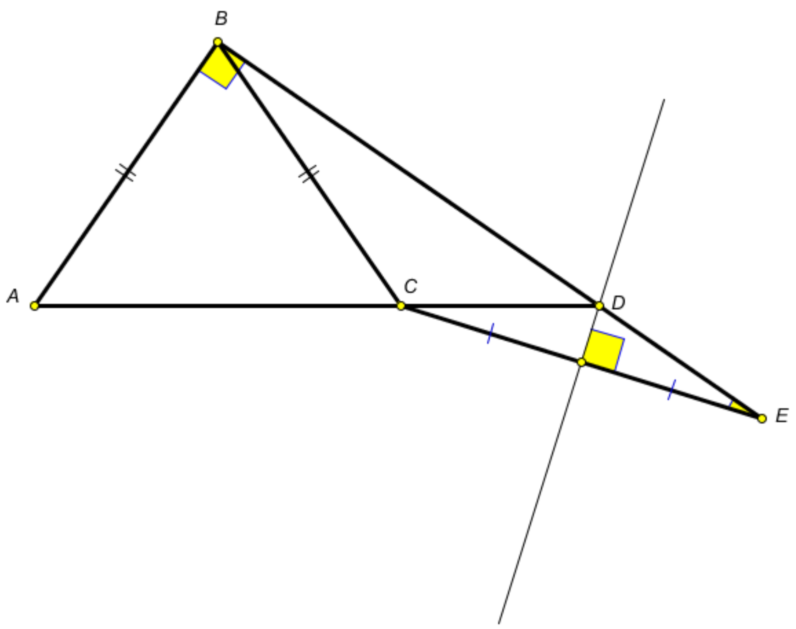
Заметим, что если последовательно строить 1-, 2-,3-, …, 10- угольники, то, новые точки, появляющиеся при построении *n*-угольника, соответствуют несократимым дробям вида $\frac{k}{n}$.

Количество таких дробей (кроме *n*=1) равно количеству натуральных чисел, меньших *n* и взаимно простых с *n*. В математике это число носит название *функция Эйлера* и обозначается $\varphi(n)$.

В итоге получим $1+\varphi(2)+\varphi(3)+\cdots+\varphi(10)=1+1+2+2+4+2+6+4+6+4=32$.

Ответ: 32.

4) Треугольник $ABC-$ равнобедренный, $AB=BC$. На продолжении стороны AC за точку C выбрана точка D, такая, что $\angle ABD=90°$. Из множества точек E, обладающих тем свойством, что точка D принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку CE, выбрали ту, которая находится на максимальном расстоянии от точки B. Найдите угол $\angle CED$, если известно, что $\angle ABC=80°$.



Решение: очевидно, $\angle BAC=\frac{180°-\angle ABC}{2}=50°$. Тогда $\angle BDA=90°-\angle BAC=40°$, а смежный ему $\angle CDE=140°$. Из условия следует, что треугольник CDE - равнобедренный, значит точка E лежит на окружности с центром D и радиусом равным CD. Наиболее удаленная от B точка получается при пересечении луча BD с этой окружностью. Значит $\angle CDE=180°-\angle BDA=140°$. Треугольник $CDE-$ равнобедренный, поэтому $\angle E=\frac{180°-\angle CDE}{2}=20°$. ***Ответ: 20***

5) Какое наименьшее значение может принимать сумма $x+y+z$ при условиях:

$$\begin{cases} x+2y\geq 5 \\ y+3z\geq 6? \\ x,y,z\geq 0 \end{cases}$$

Ответ округлите до сотых по стандартным математическим правилам.

Решение: Из первого неравенства $x \geq 5 - 2y$, поэтому всегда можно поставить $x = \max(5 - 2y, 0)$ при этом $x + y + z$ не возрастет. Аналогично, из второго неравенства $z \geq 2 - \frac{y}{3}$, поэтому можно заменить z на $\max\left(2 - \frac{y}{3}, 0\right)$. Рассмотрим функцию $f(y) = \max(5 - 2y, 0) + y + \max\left(2 - \frac{y}{3}, 0\right)$.

Она принимает наименьшее значение, равное $\frac{11}{3}$, при $y = \frac{5}{2}$. ***Ответ***: **3.67.**

6) Известно, что квадратные трехчлены $x^2 + p_1x + q_1$ и $x^2 + p_2x + q_2$ с целыми коэффициентами p_1, q_1, p_2, q_2 имеют корни и все их корни являются положительными целыми числами.

Пусть $(x^2 + p_1x + q_1) \cdot (x^2 + p_2x + q_2) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Найдите наименьшее возможное значение коэффициента *b* при этих условиях.

Решение:

Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 – корни уравнений (возможно, некоторые из них совпадают). По теореме Виета
$b = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$,
$d = x_1x_2x_3x_4$, а значит, b и d положительны. Заметим, что

$$\frac{b}{\sqrt{d}} = \left(\sqrt{\frac{x_1x_2}{x_3x_4}} + \sqrt{\frac{x_3x_4}{x_1x_2}}\right) + \left(\sqrt{\frac{x_1x_3}{x_2x_4}} + \sqrt{\frac{x_2x_4}{x_1x_3}}\right) + \left(\sqrt{\frac{x_1x_4}{x_2x_3}} + \sqrt{\frac{x_2x_3}{x_1x_4}}\right) \geq$$ 2 + 2 + 2 (неравенство Коши). Поэтому $b \geq 6$ (d – целое, значит, $d \geq 1$). Равенство достигается в случае, когда уравнения имеют четыре корня, равных 1. В этом случае многочлен имеет вид
$(x - 1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$. ***Ответ : 6.***

7. Дана последовательность положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_{10}$, удовлетворяющих соотношению $a_n(a_{n-1} + a_{n+1}) = 2a_{n-1}a_{n+1}(a_n + 1)$ при $n = 2,3, \dots ,9$. Найдите a_5 если известно, что $a_1 = 1$ и $a_{10} = 0{,}01$.

Решение: Разделим обе части на $a_{n-1}a_na_{n+1} \neq 0$ (т.к. числа положительные) и сделаем замену $\frac{1}{a_n} = b_n$, получим соотношение $b_{n-1} + b_{n+1} = 2b_n + 2. \Leftrightarrow b_{n+1} - b_n = b_n - b_{n-1} + 2$. Видно, что расстояния между соседними членами последовательности b_n возрастают каждый раз на 2. Если обозначить $b_2 - b_1 = d$, то эти расстояния будут равны $d, d + 2, \dots, d + 16$. А их сумма $(b_2 - b_1) + \dots + (b_{10} - b_9) = b_{10} - b_1 = 100 - 1 = 99$. Получаем уравнение $d + \dots + (d + 16) = 9d + 72 = 99$, откуда $d = 3$. Получаем $b_2 = 4, b_3 = 9, b_4 = 16, b_5 = 25 \Rightarrow a_5 = \frac{1}{25}$

Ответ: 0,04.