Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы» по математике

Задания заочного этапа 2020/2021 учебного года для 7–8 класса

1) Остров Рыцарей и Лжецов. Рыцари всегда говорят правду, лжецы - всегда лгут. Однажды путешественник пришел на перекресток и спросил, где находится город Рыцарей у 4 аборигенов - А, Б, В и Г.

А ответил - Идите на север, там город Рыцарей

Б ответил - Нет, город Рыцарей на юге

В сказал - не верьте, А и Б - лжецы

Г возразил - А, Б и В - рыцари.

Сколько рыцарей среди них на самом деле?

Решение: *А и Б противоречат друг другу, поэтому Г - точно лжец. Если В - рыцарь, то А и Б - лжецы. А если В - лжец - то кто-то из А и Б рыцарь, а другой лжец. В любом случае среди них ровно 1 рыцарь.* **Ответ: 1.**

2) Представьте $\frac{4}{2021}$ в виде разности двух дробей с числителями, равными 1. В ответе укажите сумму знаменателей.

Решение: $2021 = 2025 - 4 = 45^2 - 2^2 = 43 \cdot 47$. Поэтому $\frac{1}{43} - \frac{1}{47} = \frac{4}{2021}$. **Ответ 90**.

3) В выражении $0 * 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9$ вместо «звездочек» можно ставить знаки «+» или «-». Сколько различных положительных чисел можно получить таким образом?

Решение: Если везде поставить знак «+», то получится 45. В выражение входят 5 четных и 5 нечетных чисел, поэтому результат всегда будет нечетным. Докажем, что можно получить любое нечетное. Предположим, что $2k+1$ получить можно, а $2k-1$ - нельзя. Рассмотрим выражение, равное $2k+1$. Если 1 входит со знаком «+», то поменяем на «-» и получим на 2 меньше. Если 1 входит со знаком «-», а 2 - со знаком «+» - поменяем знаки у обоих, и т.д. Все числа не могут входить со знаком «-», т.к. результат будет отрицательный.

В итоге получим все 23 нечетных числа от 1 до 45. **Ответ: 23**

4) Петя пошел в лес по грибы и, конечно же, взял с собой smart-часы со встроенным компасом, шагомером и транспортиром. Петя заметил, что, когда он входил в лес между 8 и 9 часами утра, угол между часовой и минутной стрелкой составил ровно 72°. А когда он выходил из леса между 13 и 14 часами, угол тоже был ровно 72°. Сколько минут Петя провел в лесу, если известно, что это число минут - целое?

Решение: Пусть Петя зашел в лес в 8ч. x мин. Угол поворота часовой стрелки (относительно отметки 12) составит $240+\frac{x}{2}$, а угол поворота минутной - $6x$. Составим уравнение $|\,240+\frac{x}{2}-6x|=72$. Его решения $x=30\frac{6}{11}$ и $x=56\frac{8}{11}$. Аналогично для момента выхода 13ч. y мин. составим уравнение $|30+\frac{y}{2}-6y|=72$ и решим его: $y=18\frac{6}{11}$ (второй корень отрицательный). Чтобы количество минут, проведенных в лесу, было целым, выбираем $x=30\frac{6}{11}$. **Ответ: 288**

5) На окружности отмечена точка *А*. Построили правильный 3-угольник, 4-угольник,…, 10-угольник, вписанные в эту окружность и имеющие точку *А* одной из вершин. Все вершины этих многоугольников покрасили в красный цвет. Найдите, сколько получилось различных красных точек на окружности?

Решение: Поставим каждой точке X на окружности в соответствие число из интервала $[0,1)$ следующим образом: Возьмем расстояние, которое надо пройти по окружности из точки А против часовой стрелки, чтобы попасть в X и поделим его на длину окружности. Например, вершинам правильного треугольника будут соответствовать числа $0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}$. Для удобства добавим ‘1-угольник» - точку А (ей соответствует 0) и «2-угольник» - точку А и диаметрально противоположную ей (ей соответствует ½)

Заметим, что если последовательно строить 1-, 2-,3-, …, 10- угольники, то, новые точки, появляющиеся при построении *n*-угольника, соответствуют несократимым дробям вида $\frac{k}{n}$.

Количество таких дробей (кроме *n*=1) равно количеству натуральных чисел, меньших *n* и взаимно простых с *n*. В математике это число носит название *функция Эйлера* и обозначается $\varphi(n)$.

В итоге получим $1+\varphi(2)+\varphi(3)+\cdots+\varphi(10)=1+1+2+2+4+2+6+4+6+4=32$.

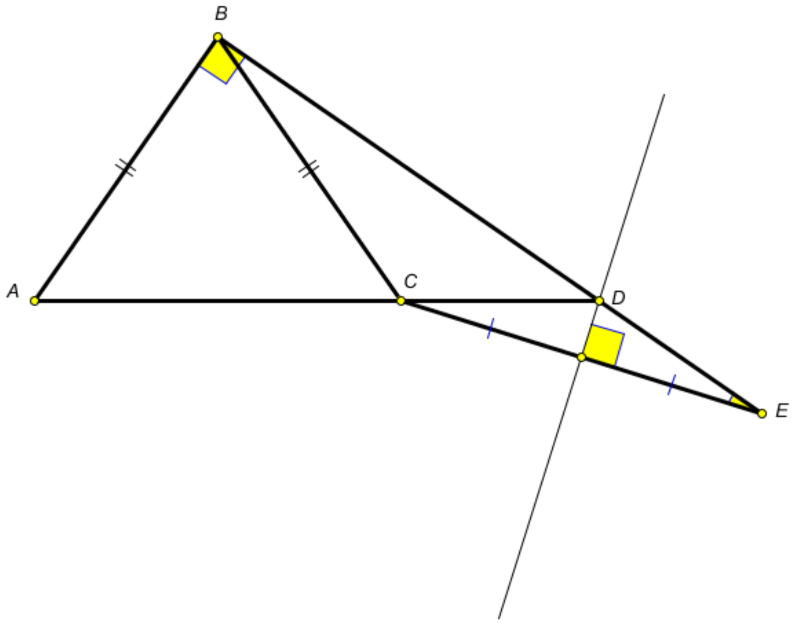
Ответ: 32.

6) Решите уравнение

$$\sqrt{(x-1)(\sqrt{x}-2)(\sqrt[3]{x}-3)}+\sqrt{(\sqrt{x}-2)(\sqrt[3]{x}-3)(\sqrt[4]{x}-4)}+\sqrt{(\sqrt[3]{x}-3)(\sqrt[4]{x}-4)(\sqrt[5]{x}-5)}=0$$

Решение*:* Такое возможно, только если все три слагаемых равны нулю, т.е. при x=27. **Ответ: 27**

7) Треугольник $ABC-$ равнобедренный, $AB=BC$. На продолжении стороны AC за точку C выбрана точка D, такая, что $\angle ABD=90°$. Из множества точек E, обладающих тем свойством, что точка D принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку CE, выбрали ту, которая находится на максимальном расстоянии от точки B. Найдите угол $\angle CED$, если известно, что $\angle ABC=80°$.



Решение: очевидно, $\angle BAC = \frac{180° - \angle ABC}{2} = 50°$. Тогда $\angle BDA = 90° - \angle BAC = 40°$, а смежный ему $\angle CDE = 140°$. Из условия следует, что треугольник CDE - равнобедренный, значит точка E лежит на окружности с центром D и радиусом равным CD. Наиболее удаленная от B точка получается при пересечении луча BD с этой окружностью. Значит $\angle CDE = 180° - \angle BDA = 140°$. Треугольник $CDE -$ равнобедренный, поэтому $\angle E = \frac{180° - \angle CDE}{2} = 20°$. ***Ответ: 20***