7-8 класс

1. Определите, является ли число $N = 7 \times 9 \times 13 + 2020 \times 2018 \times 2014$ простым или составным.

Ответ обоснуйте.

Ответ: Составное.

Решение: Заметим, что 7+2020=9+2018=13+2014=2027. Значит $N \equiv 7 \times 9 \times 13 + (-7) \times (-9) \times (-13) = 0\ (mod\ 2027)$.

2. Иван Семенович каждый день выезжает в одно и то же время, едет на работу с одной и той же скоростью и приезжает ровно в 9:00. Однажды он проспал и выехал на 40 мин. позднее обычного. Чтобы не опоздать, Иван Семенович поехал со скоростью на 60% большей, чем обычно и приехал в 8:35. На сколько процентов он должен был увеличить обычную скорость, чтобы приехать ровно в 9:00?

Ответ: На 30%.

Решение: Увеличив скорость на 60%, т.е. в 1.6 раз, Иван Семенович уменьшил время в 1.6 раз и выиграл 40+25=65 минут. Обозначив обычное время поездки за Т, получим $\frac{T}{1.6} = T - 65$, откуда $T = \frac{520}{3}$. Для того, чтобы доехать за $T - 40 = \frac{400}{3}$ надо было увеличить скорость в $\frac{520}{3} \div \frac{400}{3} = 1.3$ раз, т.е. на 30%.

3. Докажите, что сумма 6-значных чисел, не содержащих цифр 0 и 9 в десятичной записи будет кратна 37.

Решение: Разобьем на пары, взаимно дополняющие каждый разряд до 9 (например, 123456+876543). Получим сумму 999999 в каждой паре, это число равно $9 \times 1001 \times 111$. Легко проверить, что 111 кратно 37.

4. Сравните числа $\frac{100}{101} \times \frac{102}{103} \times \dots \times \frac{1020}{1021} \times \frac{1022}{1023}$ и $\frac{5}{16}$

Ответ: $\frac{100}{101} \times \frac{102}{103} \times \dots \times \frac{2020}{2021} \times \frac{2022}{2023} < \frac{5}{16}$

Решение: Заметим, что $\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$. Поэтому $A = \frac{100}{101} \times \frac{102}{103} \times \dots \times \frac{2020}{2021} \times \frac{2022}{2023} < \frac{101}{102} \times \frac{103}{104} \times \dots \times \frac{1021}{1022} \times \frac{1023}{1024} = B$. Перемножив и сократив дроби, получим $A \times B = \frac{100}{1024} = \frac{25}{256} = \left(\frac{5}{16}\right)^2$. С другой стороны, т.е. $A < B$, то $A^2 < A \times B = \left(\frac{5}{16}\right)^2$.

5. Английский клуб посещают 20 джентльменов. Некоторые из них знакомы (знакомства взаимные, т.е. если A знает B, то и B знает A). Известно, что в клубе нет трех попарно знакомых между собой джентльменов.

Однажды джентльмены пришли в клуб, и каждая пара знакомых пожала друг другу руки (один раз). Какое наибольшее число рукопожатий могло быть сделано?

Ответ: 100 рукопожатий.

Решение: Выберем джентльмена, имеющего наибольшее количество знакомых (если таких несколько - выберем любого). Допустим, он имеет *n* знакомых. Эти знакомые не могут быть попарно знакомы между собой. Рассмотрим оставшихся $(20-n-1)$ джентльменов, каждый из них имеет не более n знакомых, значит количество рукопожатий, которые они сделают не превосходит $(20-n-1)\cdot n$. Значит общее число не превосходит $(20-n)\cdot n$. Это число максимально, когда n=10. Можно показать, что 100 рукопожатий возможно - разбив джентльменов на 2 группы по 10 человек и чтобы каждый из 1-й группы был знаком с каждым из второй (а внутри групп знакомств не было).

6. Ольга Ивановна, классная руководительница 5Б, ставит «Математический балет». Она хочет расставить мальчиков и девочек так, чтобы на расстоянии 5м от каждой девочки было ровно 2 мальчика. Какое наибольшее количество девочек сможет участвовать в балете, если известно, что в нем участвуют 5 мальчиков?

Ответ: 20 девочек.

Решение: Выберем и зафиксируем произвольных 2 мальчиков - $М_1$ и $М_2$. Допустим, что они находятся на расстоянии 5 м от некоторой девочки - Д. Тогда $М_1$, $М_2$ и Д образуют равнобедренный треугольник с боковыми сторонами 5м. При фиксированных позициях $М_1$ и $М_2$ существует не более двух таких треугольников (*тут нужна картинка!*). Следовательно, для любой пары мальчиков может быть не более двух девочек. Всего пар мальчиков $C_5^2=10$, откуда и получим верхнюю оценку.

Несложно показать, что она достигается - просто поставив мальчиков в ряд с интервалом 1м и построив все возможные равнобедренные треугольники (у них вершины, очевидно, будут разные).

7. Дан правильный треугольник. Можно ли его разрезать на две фигуры, одна из которых - 2020-угольник, а другая - 2021-угольник (многоугольники не обязательно выпуклые)?

Ответ: Да, можно.

Решение: Проведем внутри треугольника 2019-звенную ломаную, соединяющую две вершины треугольника.