Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

Заключительный этап 2020/2021 года

Решение каждой задачи оценивается в 15 баллов, решения всех задач варианта — в 100 баллов.

5-6 класс

1. Вершины правильного 222-угольника покрасили в красный и синий цвет. Будем называть сторону одноцветной, если вершины покрашены в один цвет, и разноцветной, если они покрашены в разные цвета. Можно ли так раскрасить вершины, чтобы одноцветных и разноцветных сторон было поровну?

Ответ: Нет.

Решение: Допустим, получилось покрасить так, чтобы было 111 разноцветных сторон. Отправимся из произвольной точки (например, красной). Когда мы сделаем полный круг, цвет поменяется 111 раз, значит, точка будет синей. Противоречие.

2. Определите, является ли число $N = 7 \times 9 \times 13 + 2020 \times 2018 \times 2014$ простым или составным.

Ответ обоснуйте.

Ответ: Составное.

Решение: Заметим, что 7+2020=9+2018=13+2014=2027. Значит $N \equiv 7 \times 9 \times 13 + (-7) \times (-9) \times (-13) = 0 \ (mod\ 2027)$.

3. Иван Семенович каждый день выезжает в одно и то же время, едет на работу с одной и той же скоростью и приезжает ровно в 9:00. Однажды он проспал и выехал на 40 мин. позднее обычного. Чтобы не опоздать, Иван Семенович поехал со скоростью на 60% большей, чем обычно и приехал в 8:35. На сколько процентов он должен был увеличить обычную скорость, чтобы приехать ровно в 9:00?

Ответ: На 30%.

Решение: Увеличив скорость на 60%, т.е. в 1.6 раз, Иван Семенович уменьшил время в 1.6 раз и выиграл 40+25=65 минут. Обозначив обычное время поездки за Т, получим $\frac{T}{1.6} = T - 65$, откуда $T = \frac{520}{3}$. Для того, чтобы доехать за $T - 40 = \frac{400}{3}$ надо было увеличить скорость в $\frac{520}{3} \div \frac{400}{3} = 1.3$ раз, т.е. на 30%.

4. Докажите, что сумма 6-значных чисел, не содержащих цифр 0 и 9 в десятичной записи будет кратна 37.

Решение: Разобьем на пары, взаимно дополняющие каждый разряд до 9 (например, 123456+876543). Получим сумму 999999 в каждой паре, это число равно $9 \times 1001 \times 111$. Легко проверить, что 111 кратно 37.

5. Английский клуб посещают 20 джентльменов. Некоторые из них знакомы (знакомства взаимные, т.е. если А знает В, то и В знает А). Известно, что в клубе нет трех попарно знакомых между собой джентльменов.

Однажды джентльмены пришли в клуб, и каждая пара знакомых пожала друг другу руки (один раз). Какое наибольшее число рукопожатий могло быть сделано?

Ответ: 100 рукопожатий.

Решение: Выберем джентльмена, имеющего наибольшее количество знакомых (если таких несколько - выберем любого). Допустим, он имеет *n* знакомых. Эти знакомые не могут быть попарно знакомы между собой. Рассмотрим оставшихся $(20-n-1)$ джентльменов, каждый из них имеет не более n знакомых, значит количество рукопожатий, которые они сделают не превосходит $(20-n-1) \cdot n$. Значит общее число не превосходит $(20-n) \cdot n$. Это число максимально, когда n=10. Можно показать, что 100 рукопожатий возможно - разбив джентльменов на 2 группы по 10 человек и чтобы каждый из 1-й группы был знаком с каждым из второй (а внутри групп знакомств не было).

6. Сравните числа $\frac{100}{101} \times \frac{102}{103} \times \ldots \times \frac{1020}{1021} \times \frac{1022}{1023}$ и $\frac{5}{16}$

Ответ: $\frac{100}{101} \times \frac{102}{103} \times \ldots \times \frac{2020}{2021} \times \frac{2022}{2023} < \frac{5}{16}$

Решение: Заметим, что $\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$. Поэтому $A = \frac{100}{101} \times \frac{102}{103} \times \ldots \times \frac{2020}{2021} \times \frac{2022}{2023} < \frac{101}{102} \times \frac{103}{104} \times \ldots \times \frac{1021}{1022} \times \frac{1023}{1024} = B$. Перемножив и сократив дроби, получим $A \times B = \frac{100}{1024} = \frac{25}{256} = \left(\frac{5}{16}\right)^2$. С другой стороны, поскольку $A < B$, то $A^2 < A \times B = \left(\frac{5}{16}\right)^2$.

7. Ольга Ивановна, классная руководительница 5Б, ставит «Математический балет». Она хочет расставить мальчиков и девочек так, чтобы на расстоянии 5м от каждой девочки было ровно 2 мальчика. Какое наибольшее количество девочек сможет участвовать в балете, если известно, что в нем участвуют 5 мальчиков?

Ответ: 20 девочек.

Решение: Выберем и зафиксируем произвольных 2 мальчиков - $М_1$ и $М_2$. Допустим, что они находятся на расстоянии 5 м от некоторой девочки - Д. Тогда $М_1$, $М_2$ и Д образуют равнобедренный треугольник с боковыми сторонами 5м. При фиксированных позициях $М_1$ и $М_2$ существует не более двух таких треугольников (*тут нужна картинка!*). Следовательно, для любой пары мальчиков может быть не более двух девочек. Всего пар мальчиков $C_5^2 = 10$, откуда и получим верхнюю оценку.

Несложно показать, что она достигается - просто поставив мальчиков в ряд с интервалом 1м и построив все возможные равнобедренные треугольники (у них вершины, очевидно, будут разные).