*Ответы и решения к варианту **1–1** (2)*

1. Цифры чисел с 20 по 99 занимают в этом ряду первые $80 \cdot 2 = 160$ мест. Осталось $2021 - 160 = 1861$ места. Цифры чисел от 100 до 719 занимают следующие $(719 - 99) \cdot 3 = 1860$ мест. Значит, на 2021 месте стоит первая цифра числа 720, то есть 7.

Ответ: 7. Ответ к варианту: *1–2*: 0.

2. При $b = -1$ уравнение приводится в виду $|x| - \arcsin x - \arccos x - |x| + 1 + a = 0$, что при $x \in [-1; 1]$ равносильно $1 + a - \frac{\pi}{2} = 0$. Таким образом, при $b = -1$ решение существует только при $a = \frac{\pi}{2} - 1$.

С другой стороны, при $a = \frac{\pi}{2} - 1$ уравнение

$$|x| - \arcsin x + b \cdot (\arccos x + |x| - 1) + \frac{\pi}{2} - 1 = 0$$

имеет корень $x = 1$ при любом значении b.

Ответ: $\frac{\pi}{2} - 1$.

Ответ к варианту: *1–2*: $\frac{\pi}{2} - 2$.

3. Уравнение преобразуется к виду

$$t^{\alpha} = \alpha(t+1), \quad \alpha = \lg 2 \in (0,1), \quad t = x^2 - 3 > 0,$$

причём:

1) левая часть уравнения – выпуклая вверх функция (так как $\alpha \in (0;1)$), определенная при $t \geqslant 0$;

2) правая часть уравнения – линейная функция с положительным угловым коэффициентом;

3) при $t = 0$ значение левой части меньше, чем значение правой части; при $t = 1$ значение левой части, наоборот, больше значения правой, так как

$$1^{\alpha} = \lg 10 > \lg 4 = \alpha \cdot (1+1).$$

Поэтому графики пересекаются в двух точках (одна между 0 и 1, другая правее 1), каждая из которых порождает по два корня исходного уравнения.

Ответ: 4. Ответ к варианту: *1–2*: 4.

4. Так как $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, то можно преобразовать левые части уравнений:

$$\begin{cases} 2x - 3y + \frac{z}{xyz} = 6, \\ 3z - 6x + \frac{y}{xyz} = 2, \\ 6y - 2z + \frac{x}{xyz} = 3. \end{cases}$$

Введем обозначение $a = \frac{1}{xyz}$, тогда получаем линейную систему

$$\begin{cases} 2x - 3y + az = 6, \\ -6x + ay + 3z = 2, \\ ax + 6y - 2z = 3. \end{cases}$$

Первое уравнение умножим на 3 и прибавим ко второму, а также второе уравнение умножим на a $(a \neq 0)$ и прибавим к умноженному на 6 третьему. Получим новую равносильную систему

$$\begin{cases} 2x - 3y + az = 6, \\ (a-9)\,y + 3\,(a+1)\,z = 20, \\ \left(a^2 + 36\right) y + 3\,(a-4)\,z = 2a + 18. \end{cases}$$

Выразив из последнего уравнения y и подставив его во второе уравнение, получим $z = \frac{6}{a}$. После этого находятся $y = \frac{2}{a}$, $x = \frac{3}{a}$.

Так как у нас $a = \frac{1}{xyz}$, то $a = \frac{a^3}{3 \cdot 2 \cdot 6}$, откуда $a = \pm 6$.

Поэтому получается две тройки решений: $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$, $z = 1$ и $x = -\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{3}$, $z = -1$.

Ответ: $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$, $z = 1$ и $x = -\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{3}$, $z = -1$. Ответ к варианту: *1–2*: $x = 1$, $y = \frac{1}{3}$, $z = \frac{1}{2}$ и $x = -1$, $y = -\frac{1}{3}$, $z = -\frac{1}{2}$.

5. Обозначим сторону квадрата через a. Пусть прямая отсекает от стороны квадрата AD отрезок $AP = x < \frac{a}{2}$ (рис. 1).

Получившаяся конфигурация симметрична относительно прямой PR. С другой стороны, квадрат $A_1B_1C_1D_1$ получен из квадрата ABCD путем поворота относительно центра квадрата. Тогда $x = AP = PA_1 = C_1R = RC = BM = MD_1$. Поэтому прямоугольные треугольники AQP, MBN, NC_1R, QD_1M равны.

Таким образом, площадь получившейся фигуры равна сумме площадей прямоугольной трапеции PD_1C_1R и двух равных прямоугольных треугольников AQP и MBN. Площадь трапеции равна $\frac{a^2}{2}$. Значит, нам нужно

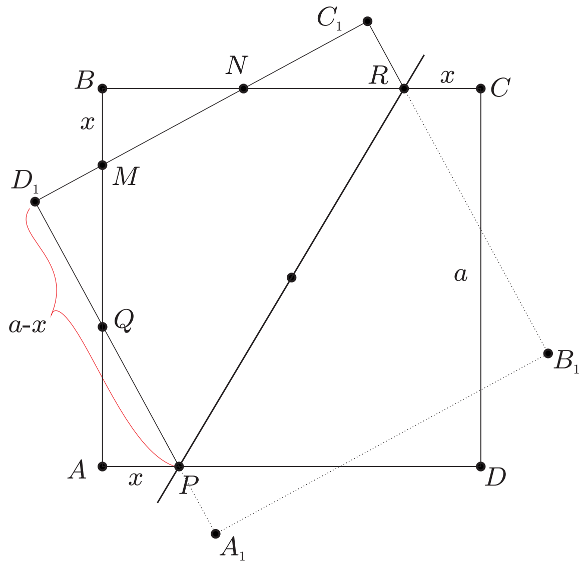

Рис. 1:

найти максимальную площадь прямоугольного треугольника AQP, периметр которого равен

$$AP + AQ + QP = BM + AQ + QM = AB = a.$$

Но максимальная площадь прямоугольного треугольника с заданным периметром будет у равнобедренного треугольника.

Это можно доказать различными способами. Например, из чисто геометрических соображений: если в прямой угол ABC вписать окружность радиуса $\frac{P}{2}$, то эта окружность будет вневписанной для всех прямоугольных треугольников с периметром P и катетами BX и BY, расположенными на сторонах угла. Так как периметр задан, то наибольшая площадь будет у треугольника с наибольшим радиусом вписанной окружности. А этот радиус будет максимальным, когда вписанная окружность касается вневписанной (если радиус будет больше, то эти две окружности пересекутся, что невозможно), то есть когда треугольник равнобедренный.

Можно, вместо этого, для доказательства использовать неравенство Коши. Из того, что

$$P = a + b + \sqrt{a^2+b^2} \geqslant 2\sqrt{ab} + \sqrt{2ab} = \sqrt{ab}\left(2+\sqrt{2}\right),$$

следует $S = \frac{ab}{2} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{P}{2+\sqrt{2}}\right)^2$, причем равенство достигается при $a = b$.

Итак,

$$\angle QPA = 45^\circ, \angle RPD = \angle QPR = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67,5^\circ.$$

Тогда $a = AB = 2x + x\sqrt{2}$, откуда $x = \frac{a}{2+\sqrt{2}} = \frac{a\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}$, и площадь ΔQPA равна $\frac{x^2}{2} = \frac{a^2\left(4+2-4\sqrt{2}\right)}{8} = \frac{a^2\left(3-2\sqrt{2}\right)}{4}$. Значит, искомая площадь есть

$$\frac{a^2}{2} + 2\cdot\frac{a^2\left(3-2\sqrt{2}\right)}{4} = \frac{a^2\left(1+3-2\sqrt{2}\right)}{2} = a^2\left(2-\sqrt{2}\right).$$

Здесь возможно и другое, алгебраическое решение. Пусть сторона квадрата равна a, и прямая отсекает от стороны квадрата AD отрезок $AP = x < \frac{a}{2}$. Найдём AQ. Обозначим $\angle RPS = \angle RPQ = \alpha$, $\angle QPA = \beta$. Поскольку из треугольника PRS (здесь S это проекция точки R на основание AD) находим $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{a-2x}$, то $\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{a(a-2x)}{2x(x-a)}$ и

$$AQ = x\cdot\operatorname{tg}\beta = x\operatorname{tg}(-2\alpha) = \frac{a(a-2x)}{2(a-x)}.$$

Следовательно катеты прямоугольных треугольников равны x и $\frac{a(a-2x)}{2(a-x)}$. Откуда искомая площадь равна $\frac{a^2}{2} + \frac{ax(a-2x)}{2(a-x)}$. С помощью производной можно получить, что максимум функции $f(x) = \frac{x(a-2x)}{(a-x)}$ достигается при $x = \frac{a(2-\sqrt{2})}{2}$, что соответствует углу $\beta = \frac{\pi}{4}$, $2\alpha = \frac{3\pi}{4}$, $\alpha = \frac{3\pi}{8}$.

Ответ: $17\left(2-\sqrt{2}\right)$. Ответ к варианту: *1–2*: $13\left(2-\sqrt{2}\right)$.

4 апреля 2021 г.