ОЛИМПИАДА «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ!»
ПО МАТЕМАТИКЕ
ОТБОРОЧНЫЙ (ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ) ЭТАП
5-9 КЛАССЫ

Участники из 5-6 классов решали задания №№ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
Участники из 7-8 классов решали задания №№ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
Участники из 9 классов решали задания №№ 3, 4а, 5, 6, 7а, 8, 9

Задача 1. Яблоко, грушу, апельсин и банан положили в четыре коробки (по одному фрукту в каждую). На коробках сделали надписи:

На 1-й: *Тут лежит апельсин.*

На 2-й: *Тут лежит груша.*

На 3-й: *Если в первой коробке лежит банан, то тут лежит яблоко или груша.*

На 4-й: *Тут лежит яблоко.*

Известно, что ни одна из надписей не соответствует действительности.

Определите, какой фрукт лежит в какой коробке. В ответе запишите последовательно, без пробелов, номера коробок в которых лежат яблоко, груша, апельсин и банан, соответственно (должно получиться 4-зачное число).

Ответ: 2431

Решение: Надпись на 3 коробке неверна, следовательно в первой коробке лежит банан, а в третьей – не яблоко и не груша, следовательно, апельсин. Из надписи на 4-й коробке следует, что там не яблоко, значит, поскольку банан в 1-й, а апельсин – во 2-й, то в 4-й лежит груша. Остается яблоко, которое лежит во второй коробке.

Задача 2. Начинающий миллионер Билл покупает букет из 7 роз за \$20 за весь букет. Затем он может продать букет из 5 роз за \$20 за букет. Сколько букетов он должен купить, чтобы «заработать» на разнице \$1000?

Ответ: 125.

Решение. Назовём «операцией» покупку 5 букетов (= 35 роз) и дальнейшую продажу 7 букетов (= 35 роз). Цена закупки равна $5\cdot 20$ = \$100, цена продажи $7\cdot 20$ = \$140. Прибыль от одной операции равна \$40.

Так как $\frac{1000}{40}=25$, то нужно 25 таких операции. Значит, Билл должен купить $5\cdot 25=125$ букетов.

Задача 3. Найдите натуральное число N ($N > 1$), если числа 1743, 2019 и 3008 дают одинаковые остатки при делении на N.

Ответ: 23.

Решение. Из условия следует, что числа 2019 – 1743 = 276 и 3008 – 2019 = 989 делятся на N. Так как $276 = 2^2 \cdot 3 \cdot 23$, а $989 = 23 \cdot 43$, то $N = 23$.

Задача 4. Найдите наименьшее такое натуральное число n, что n^2 и $(n+1)^2$ содержат цифру 7.

Ответ: 26.

Решение. Нет квадратов, заканчивающихся цифрой 7. Нет двузначных квадратов, начинающихся с 7. Значит, $n \geq 10$. Первый квадрат, содержащий 7, это $576 = 24^2$. Так как $25^2 = 625,\ 26^2 = 676,\ 27^2 = 729$, то ответ $n = 26$.

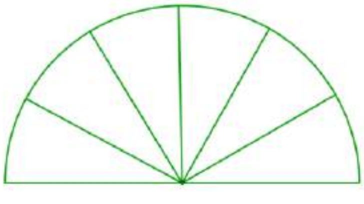
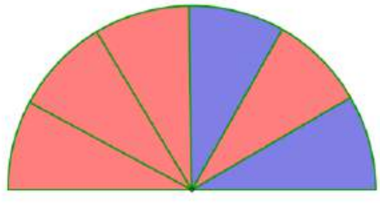
Задача 4а. Найдите наименьшее такое натуральное число n, что n^2 и $(n+1)^2$ содержат цифру 7, а $(n+2)^2$ не содержит.

Ответ: 27.

Решение. Нет квадратов, заканчивающихся цифрой 7. Нет двузначных квадратов, начинающихся с 7. Значит, $n \geq 10$. Первый квадрат, содержащий 7, это $576 = 24^2$. Так как $25^2 = 625,\ 26^2 = 676,\ 27^2 = 729,\ 28^2 = 784,\ 29^2 = 841$, то ответ $n = 27$.

Задача 5. Квадрат с целочисленной стороной разрезали на 2020 квадратов. Известно, что площади 2019 квадратов равны 1, а площадь 2020-го – не равна 1. Найдите все возможные значения, которые может принимать площадь 2020-го квадрата. В ответе наименьшее из полученных значений площади.

Ответ: 112225.

		
Нераскрашенный веер	**Раскрашенный веер**	**Обратная сторона**

Задача 6. Мастер Ли Си Цын делает веера. Каждый веер состоит из 6 секторов, покрашенных с двух сторон в красный и синий цвета (см. рис.). Причем если одна из сторон сектора покрашена в красный цвет, то обратная покрашена в синий и наоборот. Каждые два веера, сделанные мастером отличаются раскраской (если одна раскраска переходит в другую при переворачивании веера, то они считаются одинаковыми). Какое набольшее количество вееров может сделать мастер?

Ответ: 36.

<u>Решение</u>**:**

Раскраску с одной стороны можно выбрать 2^6=64 способами. Она однозначно задает раскраску обратной стороны. Но некоторые веера – те, которые переходят друг в друга при переворачивании, мы посчитали дважды. Чтобы найти их количество посмотрим, сколько вееров переходит в себя при переворачивании. Их всего 8 штук. Значит надо оставшиеся 64-8=56 поделить на два – получим 28. К ним надо добавить те 8, которые переходят в себя.

Задача 7. Сколько решений в целых числах имеет уравнение

$6y^2 + 3xy + x + 2y - 72 = 0$?

Ответ*: 4.*

<u>Решение</u>**:**

Разложим на множители:

$(3y+1)(2y+x) = 72$.

Первый множитель должен давать остаток 1 при делении на 3. У числа 72 только 4 делителя дают такой остаток: -8, -2, 1, 4. Они дают 4 решения.

Задача 7а. Сколько решений в целых числах имеет уравнение

$6y^2 + 3xy + x + 2y + 180 = 0$?

Ответ*: 6.*

<u>Решение</u>**:**

Разложим на множители:

$(3y+1)(2y+x) = 180$.

Первый множитель должен давать остаток 1 при делении на 3. У числа 180 только 6 делителей дают такой остаток: -20, -5, -2, 1, 4, 10. Они дают 6 решений.

Задача 8. Четыре рабочих выкопали траншею за 6 часов. Если бы первый работал в два раза быстрее, а второй – в два раза медленнее, то они выкопали бы за такое же время, а если бы первый работал в два раза медленнее, а второй – в два раза быстрее, то они выкопали бы траншею за 4 часа. За какое время выкопают траншею первые три рабочих?

Ответ: за 6 часов.

Решение**:** составляем уравнения, получим, что производительно 3 и 4 рабочих равна 0, т.е. они просто ничего не делали.

Задача 9. В выпуклом четырёхугольнике *ABCD* сторона *AB* равна диагонали *BD*, $\angle A = 65°$, $\angle B = 80°$, $\angle C = 75°$. Чему равен $\angle CAD$ (в градусах)?

Ответ: 15.

Решение. Так как треугольник *ABD* равнобедренный, то $\angle BDA = \angle BAD = 65°$. Поэтому $\angle DBA = 180° - 130° = 50°$. Значит, $\angle CBD = 80° - 50° = 30°$, $\angle CDB = 180° - 75° - 30° = 75°$. Это означает, что треугольник *DBC* равнобедренный, то есть *BC* = *BD* = *AB*. Поэтому $\angle BCA = \angle BAC = \frac{1}{2}(180° - 80°) = 50°$. Значит, $\angle CAD = 65° - 50° = 15°$.