ПВГ 2017

7-8 классы

1. Петров и Васечкин чинили забор. Каждому надо было прибить некоторое количество досок (одно и то же). Петров забивал в некоторые доски два гвоздя, а в некоторые - три. Васечкин забивал в некоторые доски три гвоздя, а в остальные – пять гвоздей. Найдите, сколько досок прибил каждый из них, если известно, что Петров забил 87 гвоздей, а Васечкин – 94.
   Ответ: 30.
   Решение: Если бы Петров забивал во все доски по 2 гвоздя, то он прибил бы 43 доски и еще остался бы лишний гвоздь. Если бы он во все доски забивал по 3 гвоздя, то прибил бы 29 досок. Таким образом, искомое количество лежит между 29 и 43 (включительно). Аналогично, если бы Васечкин вбивал по 3 гвоздя во все доски, то получилось бы 31 доска и 1 лишний гвоздь, а если бы по 5, то получилось бы 18 досок и 4 лишних гвоздя. Значит досок было 29, 30 или 31. Заметим, что Васечкин забивал в каждую доску нечетное количество гвоздей, поэтому досок должно быть четное количество – 30.

2. На гранях куба написаны шесть натуральных чисел (возможно, повторяющиеся), такие, что числа на соседних гранях отличаются более чем на 1. Каково наименьшее возможное значение суммы этих шести чисел?
   Ответ: 18.
   Решение: Рассмотрим три грани, имеющие общую вершину. Числа на них попарно отличаются на 2, поэтому, наименьшая возможная сумма будет для 1+3+5=9. То же можно сказать про оставшиеся три грани.
   Итак, сумма не может быть меньше 18. Покажем, что 18 можно получить – разместим на верхней и нижней гранях куба числа 1, на правой и левой – 3, а на ближней и дальней - 5.

3. На факультете Слизерин в Хогвартсе учится 30 человек. Некоторые дружат (дружба взаимна, т.е. если А дружит с В, то и В дружит с А), но нет 3 человек, которые попарно дружили бы друг с другом. На Новый год каждый отправил открытки всем своим друзьям. Какое наибольшее количество открыток могло быть отправлено?
   Ответ: 450.
   Решение: Найдем человека, у которого больше всего друзей. Предположим, что их не менее 15 и обозначим их количество как 15+a. Разобьем учащихся на две группы: в первую войдут эти 15+a учащихся. По условию они не могут дружить между собой, поэтому каждый из них имеет не более 15-a друзей. Во вторую группу войдут оставшиеся 15-a, они имеют не более 15+a друзей каждый. Таким образом, каждая из групп отправит не более 225-a^2 открыток. Следовательно, всего будет отправлено не более 450-2a^2, что не превосходит 450.
   Заметим, что эта величина достижима. Разобьем учащихся на две группы по 15 человек и пусть каждый представитель одной из групп дружит со всеми представителями другой группы.
4. Точки $A_1, \ldots, A_{12}$ являются вершинами правильного 12-угольника. Сколько существует различных 11-звенных незамкнутых ломаных без самопересечений с вершинами в этих точках? Ломаные, переходящие друг в друга при повороте считаются за одну.

Ответ: 1024.

Решение: Первую вершину ломаной можно выбрать 12 способами. Каждую следующую (кроме последней) можно выбрать двумя способами – она должна быть соседней с уже отмеченными вершинами, чтобы не было самопересечений. Последняя вершина выбирается однозначно. Получаем $12*2^{10}$ способов. Учитывая 12 возможных поворотов, получаем, что каждая ломаная будет посчитана 12 раз, поэтому это число надо разделить на 12.

Замечание : Тут в условии подразумевалось, что у ломаной есть начальная и конечная точки. Если же рассматривать ломаные как геометрические объекты, т.е. не имеющие выделенной «головы» и «хвоста», то это существенно усложняет задачу.

5. Найдите наименьшее трехзначное число обладающее свойством: если к нему приписать справа число, большее на 1, то результат (шестизначное число) будет точным квадратом.

   Ответ: 183

   Решение: обозначим искомое число а, тогда $1000a+a+1 = n^2$. Запишем в виде: 1001a=(n-1)(n+1). Разложим 1001 = 7x11x13, т.е. произведение (n-1)(n+1) должно делиться на 7, 11 и 13. Кроме того, чтобы квадрат был шестизначным числом, *n* должно быть на отрезке [317;999].

   Рассмотрим следующие варианты:

   а) n-1 кратно 143, n+1 кратно 7, тогда находим n = 573;

   б) n-1 кратно 7, n+1 кратно 143, тогда n=428;

   в) n-1 кратно 77, n+1 кратно 13, тогда n =155 – не подходит;

   г) n-1 кратно 13, n+1 кратно 77, тогда n=846

   д) n-1 кратно 91, n+1 кратно 11, тогда n = 274 – не подходит;

   е) n-1 кратно 11, n+1 кратно 91, тогда n=727.

   Наименьшее n=428, $n^2=428^2$ = 183184.

6. Петя составил все числа, которые можно составить из цифр 2,0,1,8 (каждую цифру можно использовать не более одного раза). Найдите их сумму.

   Ответ: 78331

   Решение: Рассмотрим сначала разряд единиц. Каждая из цифр 1,2,8 встречается в этом разряде 1 раз для однозначных, 2 раза для двузначных, 4 раза для трехзначных и 4 раза для 4-значных чисел – всего 11 раз.

   В разряде десятков каждая из них встречается 3 раза для двузначных, 4 для трехзначных и 4 раза для 4-значных – тоже 11 раз.

   В разряде сотен каждая встречается 6 раз в трехзначных и 4 раза в однозначных.

   В разряде тысяч каждая встречается 6 раз.

   Итого получаем 11x11 + 11x11x10 +11x10x100+11x1000x6 = 78331.

7. Дана последовательность натуральных чисел a_n, члены которой удовлетворяет соотношениям $a_{n+1} = k \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}$ (при $n \geq 2$). Все члены последовательности – целые числа. Известно, что $a_1 = 1$, и $a_{2018} = 2020$. Найдите наименьшее натуральное *k*, при котором это возможно.

   Ответ: 2020

   Решение: Пусть a2=x. Тогда все члены последовательности будут иметь вид $x^m k^n$.

   Степени k будут повторяться с периодом 6: 0, 0, 1,2,2,1,0,0,…

   Степени x тоже будут повторяться с периодом 6: 0,1,1,0,-1,-1,0,1,…

Поскольку 2018 дает остаток 2 при делении на 6, то $a_{2018} = a_2 = x = 2020$. Чтобы все члены последовательности были целыми необходимо чтобы k было кратно x, наименьшее такое k равно 2020.