

## ПВГ 2017

### 5-6 классы

1. В примере на умножение «столбиком» замените звездочки на цифры, так, чтобы получилось верное равенство.

$$\begin{array}{r} \phantom{+} \phantom{+} \phantom{+} \phantom{+} \\ \phantom{+} \phantom{+} \phantom{+} \phantom{+} \\ \phantom{+} \phantom{+} \phantom{+} \phantom{+} \\ \phantom{+} \phantom{+} \phantom{+} \phantom{+} \\ \hline * \quad * \quad * \quad * \\ + \phantom{+} \phantom{+} \phantom{+} \phantom{+} \\ * \quad * \quad * \quad * \\ \hline * \quad * \quad * \quad * \end{array}$$

В ответе укажите 4-значное число – результат умножения.

**Ответ:** 1068.

**Решение:** Заметим, что первый из сомножителей дает двухзначное число при умножении на 8, и 3-значное, при умножении на какую-то другую цифру, которая, очевидно, равна 9. Следовательно, оно не может быть более  $100/8$  или менее  $100/9$ . Такое число единственное – 12. Итого получаем  $12 \times 89 = 1068$ .

2. На сколько сумма квадратов первых ста четных чисел больше суммы квадратов первых ста нечетных чисел?

**Ответ:** 20100.

**Решение:** Сгруппируем слагаемые в виде  $(2^2 - 1^2) + (4^2 - 3^2) + \dots + (200^2 - 199^2) = (2 - 1) \cdot (2 + 1) + (4 - 3) \cdot (4 + 3) + \dots + (200 - 199) \cdot (200 + 199) = 1 + 2 + \dots + 199 + 200$ . Разобьем слагаемые на пары, дающие одинаковые суммы:

$1+200=2+199=\dots=100+101=201$ . Таких пар будет ровно 100, поэтому сумма равна 20100.

3. Петров и Васечкин чинили забор. Каждому надо было прибить некоторое количество досок (одно и то же). Петров забивал в некоторые доски по два гвоздя, а в остальные – по три гвоздя. Васечкин забивал в некоторые доски по три гвоздя, а в остальные – по пять гвоздей. Найдите, сколько досок прибил каждый из них, если известно, что Петров забил 87 гвоздей, а Васечкин – 94 гвоздя.

**Ответ:** 30.

**Решение:** Если бы Петров забивал во все доски по 2 гвоздя, то он прибил бы 43 доски и еще остался бы лишний гвоздь. Если бы он во все доски забивал по 3 гвоздя, то прибил бы 29 досок. Таким образом, искомое количество лежит между 29 и 43 (включительно). Аналогично, если бы Васечкин вбивал по 3 гвоздя во все доски, то получилось бы 31 доска и 1 лишний гвоздь, а если бы по 5, то получилось бы 18 досок и 4 лишних гвоздя. Значит досок было 29, 30 или 31. Заметим, что Васечкин забивал в каждую доску нечетное количество гвоздей, поэтому досок должно быть четное количество – 30.

4. На гранях куба написаны шесть натуральных чисел (возможно, повторяющиеся), такие, что числа на соседних гранях отличаются более чем на 1. Каково наименьшее возможное значение суммы этих шести чисел?

**Ответ:** 18.

**Решение:** Рассмотрим три грани, имеющие общую вершину. Числа на них попарно отличаются на 2, поэтому, наименьшая возможная сумма будет для  $1+3+5=9$ . То же можно сказать про оставшиеся три грани.

Итак, сумма не может быть меньше 18. Покажем, что 18 можно получить – разместим на верхней и нижней гранях куба числа 1, на правой и левой – 3, а на ближней и дальней – 5.

5. Найдите наименьшее трехзначное число обладающее свойством: если к нему приписать справа число, большее на 1, то результат (шестизначное число) будет точным квадратом.

**Ответ:** 183

**Решение:** обозначим искомое число  $a$ , тогда  $1000a+a+1 = n^2$ . Запишем в виде:  $1001a=(n-1)(n+1)$ . Разложим  $1001 = 7 \times 11 \times 13$ , т.е. произведение  $(n-1)(n+1)$  должно делиться на 7, 11 и 13. Кроме того, чтобы квадрат был шестизначным числом,  $n$  должно быть на отрезке  $[317;999]$ .

Рассмотрим следующие варианты:

- а)  $n-1$  кратно 143,  $n+1$  кратно 7, тогда находим  $n = 573$ ;
- б)  $n-1$  кратно 7,  $n+1$  кратно 143, тогда  $n=428$ ;
- в)  $n-1$  кратно 77,  $n+1$  кратно 13, тогда  $n =155$  – не подходит;
- г)  $n-1$  кратно 13,  $n+1$  кратно 77, тогда  $n=846$
- д)  $n-1$  кратно 91,  $n+1$  кратно 11, тогда  $n = 274$  – не подходит;
- е)  $n-1$  кратно 11,  $n+1$  кратно 91, тогда  $n=727$ .

Наименьшее  $n=428$ ,  $n^2=428^2 = 183184$ .

6. Петя составил всевозможные натуральные числа, которые можно составить из цифр 2, 0, 1, 8 (каждую цифру можно использовать не более одного раза). Найдите их сумму.

**Ответ:** 78331

**Решение:** Рассмотрим сначала разряд единиц. Каждая из цифр 1,2,8 встречается в этом разряде 1 раз для однозначных, 2 раза для двузначных, 4 раза для трехзначных и 4 раза для 4-значных чисел – всего 11 раз.

В разряде десятков каждая из них встречается 3 раза для двузначных, 4 для трехзначных и 4 раза для 4-значных – тоже 11 раз.

В разряде сотен каждая встречается 6 раз в трехзначных и 4 раза в однозначных.

В разряде тысяч каждая встречается 6 раз.

Итого получаем  $11 \times 11 + 11 \times 11 \times 10 + 11 \times 10 \times 100 + 11 \times 1000 \times 6 = 78331$ .