

Отборочный этап олимпиады “Покори Воробьевы горы!” по математике состоял из блиц-тура (5 задач на 3 часа) и творческой части (5 задач).

## Комплект блиц-задач

Каждый участник отборочного этапа получал свой набор задач, отличающийся от наборов задач других участников. Приводим набор типичных задач этого блиц-тура.

1. Решите неравенство

$$\frac{2^{2+\sqrt{x-1}} - 24}{2^{1+\sqrt{x-1}} - 8} > 1.$$

В ответе укажите сумму всех целочисленных значений  $x$ , удовлетворяющих данному неравенству и принадлежащих интервалу  $(-70; 34)$ .

*Решение.* Обозначив  $t = 2^{1+\sqrt{x-1}}$ , получим

$$\frac{2t - 24}{t - 8} \geq 1 \iff \frac{t - 16}{t - 8} \geq 0 \iff t \in (-\infty; 8) \cup [16; +\infty).$$

Отсюда либо  $2^{1+\sqrt{x-1}} < 2^3$ ,  $\sqrt{x-1} < 2$ ,  $x \in [1; 5)$ , либо  $2^{1+\sqrt{x-1}} \geq 2^4$ ,  $\sqrt{x-1} \geq 3$ ,  $x \in [10; +\infty)$ . Таким образом, решение неравенства  $x \in [1; 5) \cup (10; +\infty)$ . Искомая сумма

$$1 + 2 + 3 + 4 + (10 + 11 + 12 + \dots + 33) = 10 + \frac{10 + 33}{2} \cdot 24 = 526.$$

□

**Ответ:** 526.

2. Решите уравнение

$$\sin^4 x + 5(x - 2\pi)^2 \cos x + 5x^2 + 20\pi^2 = 20\pi x.$$

Найдите сумму его корней, принадлежащих отрезку  $[-\pi; 6\pi]$ , и укажите ее в ответе, при необходимости округлив до двух знаков после запятой.

*Решение.* Исходное уравнение равносильно уравнению

$$\sin^4 x + 5(x - 2\pi)^2(\cos x + 1) = 0,$$

левая часть которого неотрицательна. Поэтому  $\sin x = 0$  и  $(x - 2\pi)^2(\cos x + 1) = 0$ . Поэтому решение уравнения:  $x = 2\pi$  и  $x = \pi + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . На отрезок  $[-\pi; 6\pi]$  попадает значения  $-\pi$ ,  $\pi$ ,  $2\pi$ ,  $3\pi$ ,  $5\pi$ , сумма которых равна  $10\pi \approx 31,4159\dots$  В ответ записываем 31,42.

□

**Ответ:** 31,42.

3. Внутри прямоугольного треугольника  $ABC$  с гипотенузой  $AC$  взята точка  $M$  так, что площади треугольников  $ABM$  и  $BCM$  составляют треть и четверть площади треугольника  $ABC$  соответственно. Найти  $BM$ , если  $AM = 60$  и  $CM = 70$ . В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

*Решение.* Обозначив  $AB = c$ ,  $BC = a$ , получим

$$\begin{cases} (c - \frac{c}{4})^2 + (\frac{a}{3})^2 = 60^2, \\ (\frac{c}{4})^2 + (a - \frac{a}{3})^2 = 70^2. \end{cases}$$

Решаем систему и находим  $BM = (\frac{a}{3})^2 + (\frac{c}{4})^2 = \frac{100^2}{7}$ . Поэтому  $BM = \frac{100}{\sqrt{7}}$ . В ответ записываем ближайшее целое.

□

**Ответ:** 38.

4. Первая бригада рабочих делает асфальт на одном участке дороги, а вторая бригада, в которой на 6 рабочих больше, — на другом, площадь которого втрое больше. Производительность всех рабочих одинакова. Какое наименьшее число рабочих могло быть в первой бригаде, если свою работу она выполнила быстрее? Если решений нет, то в ответе поставьте 0.

*Решение.* Если в первой бригаде  $n$  рабочих, площадь первого участка равна  $S$ , а производительность одного рабочего равна  $x$ , то условие задачи запишется в виде  $\frac{S}{nx} < \frac{3S}{(n+6)x}$ , откуда следует  $\frac{1}{n} < \frac{3}{n+6}$ , и  $n > 3$ . Таким образом, наименьшим возможным  $n$  является 4. □

**Ответ:** 4.

5. Найдите все  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 1, \\ x + 2y = a. \end{cases}$$

имеет единственное решение. При необходимости округлите его до двух знаков после запятой. Если решений нет, то в ответе поставьте 0.

*Решение.* Так как  $2y = a - x$ , то из первого уравнения получим:

$$x^2 + (a - x)^2 = 1 \iff 2x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0.$$

Это уравнение имеет единственное решение при  $\frac{D}{4} = 2 - a^2 = 0$ . Значит,  $a = \pm\sqrt{2}$ , наименьшее значение равно  $-\sqrt{2} \approx -1,414214\dots$  □

**Ответ:**  $-1,41$ .

---

---

I. Дано 2018 множеств, каждое из которых состоит из 45 элементов. Объединение любых двух из этих множеств содержит 89 элементов. Сколько элементов содержит объединение всех 2018 множеств?

---

*Решение.* В пересечении каждых двух множеств содержится ровно один элемент. Можно доказать (см. ниже), что в пересечении всех 2018 множеств содержится именно этот элемент. Тогда суммарное количество элементов будет равно  $2018 \cdot 44 + 1 = 88793$ .

Доказательство. Рассмотрим произвольное множество. Так как  $\frac{2018}{45} > 44$ , то с одним из элементов этого множества пересекутся, как минимум 45 других множеств. Таким образом, получилось 46 множеств, пересекающихся по одному элементу. Но тогда любое другое множество или содержит данный элемент, или содержит по одному элементу из этих 46 множеств. Последнее невозможно, так как в множестве лишь 45 элементов. Поэтому данный элемент содержится во всех множествах.

**Ответ:** 88793.

□

1. Дано 2018 множеств, каждое из которых состоит из 45 элементов. Объединение любых двух из этих множеств содержит 89 элементов. Сколько элементов содержит объединение всех 2018 множеств?

**Ответ:** 88793.

2. Дано 2017 множеств, каждое из которых состоит из 45 элементов. Объединение любых двух из этих множеств содержит 89 элементов. Сколько элементов содержит объединение всех 2017 множеств?

**Ответ:** 88749.

3. Дано 2019 множеств, каждое из которых состоит из 45 элементов. Объединение любых двух из этих множеств содержит 89 элементов. Сколько элементов содержит объединение всех 2019 множеств?

**Ответ:** 88837.

4. Дано 2020 множеств, каждое из которых состоит из 45 элементов. Объединение любых двух из этих множеств содержит 89 элементов. Сколько элементов содержит объединение всех 2020 множеств?

**Ответ:** 88881.

5. Дано 2021 множество, каждое из которых состоит из 45 элементов. Объединение любых двух из этих множеств содержит 89 элементов. Сколько элементов содержит объединение всех 2021 множеств?

**Ответ:** 88925.

6. Дано 2022 множества, каждое из которых состоит из 45 элементов. Объединение любых двух из этих множеств содержит 89 элементов. Сколько элементов содержит объединение всех 2022 множеств?

**Ответ:** 88969.

7. Дано 2023 множества, каждое из которых состоит из 45 элементов. Объединение любых двух из этих множеств содержит 89 элементов. Сколько элементов содержит объединение всех 2023 множеств?

**Ответ:** 89013.

8. Дано 2024 множества, каждое из которых состоит из 45 элементов. Объединение любых двух из этих множеств содержит 89 элементов. Сколько элементов содержит объединение всех 2024 множеств?

**Ответ:** 89057.

9. Дано 2018 множеств, каждое из которых состоит из 44 элементов. Объединение любых двух из этих множеств содержит 87 элементов. Сколько элементов содержит объединение всех 2018 множеств?

**Ответ:** 86775.

10. Дано 2017 множеств, каждое из которых состоит из 44 элементов. Объединение любых двух из этих множеств содержит 87 элементов. Сколько элементов содержит объединение всех 2017 множеств?

**Ответ:** 86732.

11. Дано 2019 множеств, каждое из которых состоит из 44 элементов. Объединение любых двух из этих множеств содержит 87 элементов. Сколько элементов содержит объединение всех 2019 множеств?

**Ответ:** 86818.

12. Дано 2020 множеств, каждое из которых состоит из 44 элементов. Объединение любых двух из этих множеств содержит 87 элементов. Сколько элементов содержит объединение всех 2020 множеств?

**Ответ:** 86861.

13. Дано 2021 множество, каждое из которых состоит из 44 элементов. Объединение любых двух из этих множеств содержит 87 элементов. Сколько элементов содержит объединение всех 2021 множеств?

**Ответ:** 86904.

14. Дано 2022 множества, каждое из которых состоит из 44 элементов. Объединение любых двух из этих множеств содержит 87 элементов. Сколько элементов содержит объединение всех 2022 множеств?

**Ответ:** 86947.

15. Дано 2023 множества, каждое из которых состоит из 44 элементов. Объединение любых двух из этих множеств содержит 87 элементов. Сколько элементов содержит объединение всех 2023 множеств?

**Ответ:** 86990.

16. Дано 2024 множества, каждое из которых состоит из 44 элементов. Объединение любых двух из этих множеств содержит 87 элементов. Сколько элементов содержит объединение всех 2024 множеств?

**Ответ:** 87033.

---

II. Найдите количество натуральных чисел  $n$ , не превышающих 500, для которых уравнение  $x^{[x]} = n$  имеет решение. Здесь  $[x]$  — наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ .

---

*Решение.* Если  $[x] = 0$ , то решение:  $0 \leq x < 1$ ,  $n = 1$ . Для  $x \geq 1$  уравнение  $x^{[x]} = n$  имеет решение при таких  $n$ , при которых  $[x]^{[x]} \leq n < [x + 1]^{[x]}$ .

Поэтому  $[x] = 1 \Rightarrow n = 1$  ( $x = 1$ );

$$[x] = 2 \Rightarrow n = 4(x = 2); n = 5(x = \sqrt{5}); n = 6(x = \sqrt{6}); n = 7(x = \sqrt{7}); n = 8(x = \sqrt{8});$$

$$[x] = 3 \Rightarrow n = 27(x = 3); n = 28(x = \sqrt[3]{28}); \dots, n = 63(x = \sqrt[3]{63});$$

$$[x] = 4 \Rightarrow n = 256(x = 4); n = 257(x = \sqrt[4]{257}); \dots, n = 500(x = \sqrt[4]{500});$$

$x \geq 5$  невозможно, так как  $5^5 = 3125 > 500$ .

Поэтому получаем:  $n = 1, 4, 5, 6, 7, 8, 27, 28, \dots, 62, 63, 256, 257, \dots, 500$ . Всего 288 чисел.

**Ответ:** 288.

□

1. Найдите количество натуральных чисел  $n$ , не превышающих 500, для которых уравнение  $x^{[x]} = n$  имеет решение. Здесь  $[x]$  — наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ .

**Ответ:** 288.

2. Найдите количество натуральных чисел  $n$ , не превышающих 499, для которых уравнение  $x^{[x]} = n$  имеет решение. Здесь  $[x]$  — наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ .

**Ответ:** 287.

3. Найдите количество натуральных чисел  $n$ , не превышающих 498, для которых уравнение  $x^{[x]} = n$  имеет решение. Здесь  $[x]$  — наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ .

**Ответ:** 286.

4. Найдите количество натуральных чисел  $n$ , не превышающих 497, для которых уравнение  $x^{[x]} = n$  имеет решение. Здесь  $[x]$  — наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ .

**Ответ:** 285.

5. Найдите количество натуральных чисел  $n$ , не превышающих 496, для которых уравнение  $x^{[x]} = n$  имеет решение. Здесь  $[x]$  — наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ .

**Ответ:** 284.

6. Найдите количество натуральных чисел  $n$ , не превышающих 495, для которых уравнение  $x^{[x]} = n$  имеет решение. Здесь  $[x]$  — наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ .

**Ответ:** 283.

7. Найдите количество натуральных чисел  $n$ , не превышающих 494, для которых уравнение  $x^{[x]} = n$  имеет решение. Здесь  $[x]$  — наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ .

**Ответ:** 282.

8. Найдите количество натуральных чисел  $n$ , не превышающих 493, для которых уравнение  $x^{[x]} = n$  имеет решение. Здесь  $[x]$  — наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ .



**27.** Найдите количество натуральных чисел  $n$ , не превышающих 3131, для которых уравнение  $x^{[x]} = n$  имеет решение. Здесь  $[x]$  — наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ .

**Ответ:** 419.

**28.** Найдите количество натуральных чисел  $n$ , не превышающих 3132, для которых уравнение  $x^{[x]} = n$  имеет решение. Здесь  $[x]$  — наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ .

**Ответ:** 420.

**29.** Найдите количество натуральных чисел  $n$ , не превышающих 3133, для которых уравнение  $x^{[x]} = n$  имеет решение. Здесь  $[x]$  — наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ .

**Ответ:** 421.

**30.** Найдите количество натуральных чисел  $n$ , не превышающих 3134, для которых уравнение  $x^{[x]} = n$  имеет решение. Здесь  $[x]$  — наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ .

**Ответ:** 422.

**III.** Решите неравенство

$$\frac{4^{-|x-2|}}{\sqrt{x^2 - x - 2} + 2} \leq \frac{2^{1-|x|}}{\sqrt{x^2 + 6x + 4}}.$$

В ответ запишите наименьший по модулю корень, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой. Если решений нет, то в ответе укажите число 0.

*Решение.* Перепишем неравенство в виде

$$\frac{4^{-|x-2|}}{\sqrt{(x+1)(x-2)} + 2} \leq \frac{2^{-|x|}}{\sqrt{(\frac{x}{2} + 3)(\frac{x}{2})} + 2}.$$

Если левую часть обозначить через  $f(x)$ , то правая равна  $f(\frac{x}{2} + 2)$  и получится неравенство

$$f(x) \leq f\left(\frac{x}{2} + 2\right).$$

Разберемся с монотонностью. Множество определения исходного неравенства — это множество  $(-\infty; -6] \cup [2; \infty)$ .

На множестве  $x \leq -6$  левая и правая часть неравенства возрастают, поэтому получим  $x \leq \frac{x}{2} + 2$ .

На множестве  $x \geq 2$  левая и правая части неравенства убывают, поэтому получим  $x \geq \frac{x}{2} + 2$ .

Поскольку решение неравенства будет  $x \in (-\infty; -6] \cup [4; \infty)$ , то  $x = 4$ .

**Ответ:** 4. □

**1.** Решите неравенство

$$\frac{4^{-|x-2|}}{\sqrt{x^2 - x - 2} + 2} \leq \frac{2^{1-|x|}}{\sqrt{x^2 + 6x + 4}}.$$

В ответ запишите сумму длин интервалов решения, принадлежащих множеству  $[-2018, 2018]$ . Если неравенство не имеет решений, то запишите  $-1$ .

**Ответ:** 4026.

**2.** Решите неравенство

$$\frac{4^{-|x|}}{\sqrt{x^2 + x - 2} + 1} \leq \frac{2^{1-|x-4|}}{\sqrt{x^2 - 6x + 2}}.$$

В ответ запишите сумму длин интервалов решения, принадлежащих множеству  $[-2018, 2019]$ . Если неравенство не имеет решений, то запишите  $-1$ .

**Ответ:** 4027.

**3.** Решите неравенство

$$\frac{8^{-|x-2|}}{\sqrt{x^2 - 4} + 1} \leq \frac{3 \cdot 2^{-|x|}}{\sqrt{x^2 + 12x + 3}}.$$

В ответ запишите сумму длин интервалов решения, принадлежащих множеству  $[-2018, 2018]$ . Если неравенство не имеет решений, то запишите  $-1$ .

**Ответ:** 4021.

4. Решите неравенство

$$\frac{8^{-|x-3|}}{\sqrt{x^2 - 3x - 4} + 2} \leq \frac{3 \cdot 2^{-|x+3|}}{\sqrt{x^2 + 15x + 6}}.$$

В ответ запишите сумму длин интервалов решения, принадлежащих множеству  $[-2018, 2018]$ . Если неравенство не имеет решений, то запишите  $-1$ .

**Ответ:** 4015.

5. Решите неравенство

$$\frac{9^{-|x+1|}}{\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 3} \leq \frac{2 \cdot 3^{-|x|}}{\sqrt{x^2 - 8x + 6}}.$$

В ответ запишите сумму длин интервалов решения, принадлежащих множеству  $[-2020, 2018]$ . Если неравенство не имеет решений, то запишите  $-1$ .

**Ответ:** 4028.

6. Решите неравенство

$$\frac{8^{-|x+2|}}{\sqrt{x^2 + x - 2} + 1} \leq \frac{3 \cdot 2^{-|x|}}{\sqrt{x^2 - 9x + 3}}.$$

В ответ запишите сумму длин интервалов решения, принадлежащих множеству  $[-2018, 2018]$ . Если неравенство не имеет решений, то запишите  $-1$ .

**Ответ:** 4024.

7. Решите неравенство

$$\frac{4^{-|x-3|}}{\sqrt{x^2 - 9} + 2} \leq \frac{2^{1-|x|}}{\sqrt{x^2 + 12x + 4}}.$$

В ответ запишите сумму длин интервалов решения, принадлежащих множеству  $[-2018, 2018]$ . Если неравенство не имеет решений, то запишите  $-1$ .

**Ответ:** 4018.

8. Решите неравенство

$$\frac{4^{-|x+2|}}{\sqrt{x^2 + x - 2} + 3} \leq \frac{2^{1-|x|}}{\sqrt{x^2 - 6x + 6}}.$$

В ответ запишите сумму длин интервалов решения, принадлежащих множеству  $[-2018, 2018]$ . Если неравенство не имеет решений, то запишите  $-1$ .

**Ответ:** 4026.

9. Решите неравенство

$$\frac{4^{-|x|}}{\sqrt{x^2 + 3x + 1}} \leq \frac{2^{1-|x+2|}}{\sqrt{x^2 + 10x + 16} + 2}.$$

В ответ запишите сумму длин интервалов решения, принадлежащих множеству  $[-2018, 2018]$ . Если неравенство не имеет решений, то запишите  $-1$ .

**Ответ:** 4026.

10. Решите неравенство

$$\frac{4^{-|x|}}{\sqrt{x^2 - x - 2} + 3} \leq \frac{2^{1-|x+4|}}{\sqrt{x^2 + 6x + 6}}.$$

В ответ запишите сумму длин интервалов решения, принадлежащих множеству  $[-2018, 2018]$ . Если неравенство не имеет решений, то запишите  $-1$ .

**Ответ:** 4026.

11. Решите неравенство

$$\frac{4^{-|x+1|}}{\sqrt{x^2 + 3x + 2}} \leq \frac{2^{1-|x-3|}}{\sqrt{x^2 - 4x - 5} + 4}.$$

В ответ запишите сумму длин интервалов решения, принадлежащих множеству  $[-2018, 2018]$ . Если неравенство не имеет решений, то запишите  $-1$ .

**Ответ:** 4026.

12. Решите неравенство

$$\frac{8^{-|x+2|}}{\sqrt{x^2-4}+3} \leq \frac{3 \cdot 2^{-|x|}}{\sqrt{x^2-12x+9}}.$$

В ответ запишите сумму длин интервалов решения, принадлежащих множеству  $[-2018, 2018]$ . Если неравенство не имеет решений, то запишите  $-1$ .

**Ответ:** 4021.

13. Решите неравенство

$$\frac{8^{-|x|}}{\sqrt{x^2+4x}+2} \leq \frac{3 \cdot 2^{-|x+2|}}{\sqrt{x^2+16x+28}+6}.$$

В ответ запишите сумму длин интервалов решения, принадлежащих множеству  $[-2019, 2018]$ . Если неравенство не имеет решений, то запишите  $-1$ .

**Ответ:** 4022.

14. Решите неравенство

$$\frac{8^{-|x-5|}}{\sqrt{x^2-6x+5}+2} \leq \frac{3 \cdot 2^{-|x-3|}}{\sqrt{x^2+6x-27}+6}.$$

В ответ запишите сумму длин интервалов решения, принадлежащих множеству  $[-2020, 2018]$ . Если неравенство не имеет решений, то запишите  $-1$ .

**Ответ:** 4023.

15. Решите неравенство

$$\frac{8^{-|x+3|}}{\sqrt{x^2+3x-4}+2} \leq \frac{3 \cdot 2^{-|x-3|}}{\sqrt{x^2-15x+6}}.$$

В ответ запишите сумму длин интервалов решения, принадлежащих множеству  $[-2018, 2018]$ . Если неравенство не имеет решений, то запишите  $-1$ .

**Ответ:** 4015.

16. Решите неравенство

$$\frac{8^{-|x-6|}}{\sqrt{x^2-9x+14}+1} \leq \frac{3 \cdot 2^{-|x|}}{\sqrt{x^2+9x-36}+3}.$$

В ответ запишите сумму длин интервалов решения, принадлежащих множеству  $[-2019, 2018]$ . Если неравенство не имеет решений, то запишите  $-1$ .

**Ответ:** 4016.

17. Решите неравенство

$$\frac{8^{-|x-4|}}{\sqrt{x^2-5x}+3} \leq \frac{3 \cdot 2^{-|x+2|}}{\sqrt{x^2+13x-14}+9}.$$

В ответ запишите сумму длин интервалов решения, принадлежащих множеству  $[-2020, 2018]$ . Если неравенство не имеет решений, то запишите  $-1$ .

**Ответ:** 4017.

18. Решите неравенство

$$\frac{9^{-|x-1|}}{\sqrt{x^2+2x-3}+2} \leq \frac{2 \cdot 3^{-|x|}}{\sqrt{x^2+8x+4}}.$$

В ответ запишите сумму длин интервалов решения, принадлежащих множеству  $[-2018, 2018]$ . Если неравенство не имеет решений, то запишите  $-1$ .

**Ответ:** 4026.

19. Решите неравенство

$$\frac{9^{-|x|}}{\sqrt{x^2-4x}+2} \leq \frac{2 \cdot 3^{-|x-1|}}{\sqrt{x^2-10x+9}+4}.$$

В ответ запишите сумму длин интервалов решения, принадлежащих множеству  $[-2019, 2018]$ . Если неравенство не имеет решений, то запишите  $-1$ .

**Ответ:** 4027.

20. Решите неравенство

$$\frac{9^{-|x-1|}}{\sqrt{x^2-6x+5}+1} \leq \frac{2 \cdot 3^{-|x-2|}}{\sqrt{x^2-12x+20}+2}.$$



В ответ запишите сумму длин интервалов решения, принадлежащих множеству  $[-2020, 2018]$ . Если неравенство не имеет решений, то запишите  $-1$ .

**Ответ:** 4028.

**21.** Решите неравенство

$$\frac{8^{-|x-2|}}{\sqrt{x^2 - x - 2} + 2} \leq \frac{3 \cdot 2^{-|x|}}{\sqrt{x^2 + 9x + 6}}.$$

В ответ запишите сумму длин интервалов решения, принадлежащих множеству  $[-2019, 2018]$ . Если неравенство не имеет решений, то запишите  $-1$ .

**Ответ:** 4025.

**22.** Решите неравенство

$$\frac{8^{-|x|}}{\sqrt{x^2 - 3x + 1}} \leq \frac{3 \cdot 2^{-|x-2|}}{\sqrt{x^2 - 13x + 22} + 3}.$$

В ответ запишите сумму длин интервалов решения, принадлежащих множеству  $[-2020, 2018]$ . Если неравенство не имеет решений, то запишите  $-1$ .

**Ответ:** 4026.

**23.** Решите неравенство

$$\frac{4^{-|x+3|}}{\sqrt{x^2 - 9} + 4} \leq \frac{2^{1-|x|}}{\sqrt{x^2 - 12x + 8}}.$$

В ответ запишите сумму длин интервалов решения, принадлежащих множеству  $[-2018, 2018]$ . Если неравенство не имеет решений, то запишите  $-1$ .

**Ответ:** 4018.

**24.** Решите неравенство

$$\frac{4^{-|x|}}{\sqrt{x^2 + 6x + 1}} \leq \frac{2^{1-|x+3|}}{\sqrt{x^2 + 18x + 45} + 2}.$$

В ответ запишите сумму длин интервалов решения, принадлежащих множеству  $[-2019, 2018]$ . Если неравенство не имеет решений, то запишите  $-1$ .

**Ответ:** 4019.

**25.** Решите неравенство

$$\frac{4^{-|x-6|}}{\sqrt{x^2 - 6x + 3}} \leq \frac{2^{1-|x-3|}}{\sqrt{x^2 + 6x - 27} + 6}.$$

В ответ запишите сумму длин интервалов решения, принадлежащих множеству  $[-2020, 2018]$ . Если неравенство не имеет решений, то запишите  $-1$ .

**Ответ:** 4020.

**IV.** В треугольнике  $ABC$  проведена высота  $BH$ , точка  $O$  — центр описанной около него окружности, длина ее радиуса равна  $R$ . Найдите наибольший из углов  $\angle BAC$ ,  $\angle ACB$ , выраженный в радианах, если известно, что  $R = (6/5) \cdot BH = 4 \cdot OH$ . При необходимости округлите найденное значение до двух знаков после запятой.

*Решение.* Будем считать  $R = 12$ , тогда  $BH = 10$ ,  $OH = 3$ . Тем самым  $\triangle OBH$  полностью определён, и его площадь по формуле Герона равна

$$S = \sqrt{\frac{25}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{19}{2}} = \frac{5\sqrt{95}}{4}.$$

Тогда высота  $OH_1 = \frac{2S}{BH} = \frac{2 \cdot 5\sqrt{95}}{4 \cdot 10} = \frac{\sqrt{95}}{4}$ . Откуда  $MH = OH_1 = \frac{\sqrt{95}}{4}$ . Далее по теореме Пифагора:

$$OM^2 = OH^2 - MH^2 = 3^2 - \left(\frac{\sqrt{95}}{4}\right)^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^2, \quad OM = \frac{7}{4};$$

$$AM^2 = AO^2 - OM^2 = 12^2 - \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{41 \cdot 55}{16}, \quad AM = MC = \frac{\sqrt{41 \cdot 55}}{4}.$$

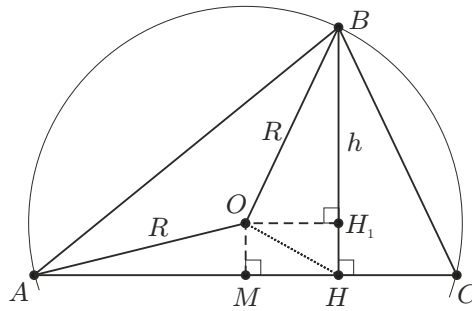


Рис. 1:

Так как  $AM = MC > MH$ , то  $\angle ACB > \angle BAC$ .

$$\angle ACB = \arctg\left(\frac{BH}{HC}\right) = \arctg\left(\frac{10 \cdot 4}{\sqrt{41 \cdot 55} - \sqrt{95}}\right) \approx 0,81446 \dots$$

Заметим, что точка  $O$  в данном случае лежит вне  $\triangle ABC$ , но все вычисления остаются в силе.

**Ответ:** 0,81.

□

1. В треугольнике  $ABC$  проведена высота  $BH$ , точка  $O$  – центр описанной около него окружности, длина ее радиуса равна  $R$ . Найдите выраженную в радианах величину наибольшего из углов  $ACB$  и  $BAC$ , если известно, что  $R = (6/5) \cdot BH = 4 \cdot OH$ . При необходимости округлите найденное значение до двух знаков после запятой.

**Ответ:** 0,81.

2. В треугольнике  $ABC$  проведена высота  $BH$ , точка  $O$  – центр описанной около него окружности, длина ее радиуса равна  $R$ . Найдите выраженную в радианах величину наименьшего из углов  $ACB$  и  $BAC$ , если известно, что  $R = 2 \cdot BH = (4/3) \cdot OH$ . При необходимости округлите найденное значение до двух знаков после запятой.

**Ответ:** 0,28.

3. В треугольнике  $ABC$  проведена высота  $BH$ , точка  $O$  – центр описанной около него окружности, длина ее радиуса равна  $R$ . Найдите выраженную в радианах величину наибольшего из углов  $ACB$  и  $BAC$ , если известно, что  $R = 2 \cdot BH = (4/5) \cdot OH$ . При необходимости округлите найденное значение до двух знаков после запятой.

**Ответ:** 2,20.

4. В треугольнике  $ABC$  проведена высота  $BH$ , точка  $O$  – центр описанной около него окружности, длина ее радиуса равна  $R$ . Найдите выраженную в радианах величину наименьшего из углов  $ACB$  и  $BAC$ , если известно, что  $R = (4/3) \cdot BH = 2 \cdot OH$ . При необходимости округлите найденное значение до двух знаков после запятой.

**Ответ:** 0,47.

5. В треугольнике  $ABC$  проведена высота  $BH$ , точка  $O$  – центр описанной около него окружности, длина ее радиуса равна  $R$ . Найдите выраженную в радианах величину наибольшего из углов  $ACB$  и  $BAC$ , если известно, что  $R = (4/3) \cdot BH = (4/5) \cdot OH$ . При необходимости округлите найденное значение до двух знаков после запятой.

**Ответ:** 1,99.

6. В треугольнике  $ABC$  проведена высота  $BH$ , точка  $O$  – центр описанной около него окружности, длина ее радиуса равна  $R$ . Найдите выраженную в радианах величину наименьшего из углов  $ACB$  и  $BAC$ , если известно, что  $R = BH = 4 \cdot OH$ . При необходимости округлите найденное значение до двух знаков после запятой.

**Ответ: 0,68.**

7. В треугольнике  $ABC$  проведена высота  $BH$ , точка  $O$  – центр описанной около него окружности, длина ее радиуса равна  $R$ . Найдите выраженную в радианах величину наибольшего из углов  $ACB$  и  $BAC$ , если известно, что  $R = BH = 2 \cdot OH$ . При необходимости округлите найденное значение до двух знаков после запятой.

**Ответ: 1,10.**

8. В треугольнике  $ABC$  проведена высота  $BH$ , точка  $O$  – центр описанной около него окружности, длина ее радиуса равна  $R$ . Найдите выраженную в радианах величину наименьшего из углов  $ACB$  и  $BAC$ , если известно, что  $R = BH = (4/5) \cdot OH$ . При необходимости округлите найденное значение до двух знаков после запятой.

**Ответ: 0,56.**

9. В треугольнике  $ABC$  проведена высота  $BH$ , точка  $O$  – центр описанной около него окружности, длина ее радиуса равна  $R$ . Найдите выраженную в радианах величину наибольшего из углов  $ACB$  и  $BAC$ , если известно, что  $R = (4/5) \cdot BH = 2 \cdot OH$ . При необходимости округлите найденное значение до двух знаков после запятой.

**Ответ: 1,15.**

10. В треугольнике  $ABC$  проведена высота  $BH$ , точка  $O$  – центр описанной около него окружности, длина ее радиуса равна  $R$ . Найдите выраженную в радианах величину наименьшего из углов  $ACB$  и  $BAC$ , если известно, что  $R = (4/5) \cdot BH = (4/3) \cdot OH$ . При необходимости округлите найденное значение до двух знаков после запятой.

**Ответ: 0,70.**

11. В треугольнике  $ABC$  проведена высота  $BH$ , точка  $O$  – центр описанной около него окружности, длина ее радиуса равна  $R$ . Найдите выраженную в радианах величину наибольшего из углов  $ACB$  и  $BAC$ , если известно, что  $R = (2/3) \cdot BH = (4/3) \cdot OH$ . При необходимости округлите найденное значение до двух знаков после запятой.

**Ответ: 1,34.**

12. В треугольнике  $ABC$  проведена высота  $BH$ , точка  $O$  – центр описанной около него окружности, длина ее радиуса равна  $R$ . Найдите выраженную в радианах величину наименьшего из углов  $ACB$  и  $BAC$ , если известно, что  $R = (2/3) \cdot BH = (4/5) \cdot OH$ . При необходимости округлите найденное значение до двух знаков после запятой.

**Ответ: 0,91.**

13. В треугольнике  $ABC$  проведена высота  $BH$ , точка  $O$  – центр описанной около него окружности, длина ее радиуса равна  $R$ . Найдите выраженную в радианах величину наибольшего из углов  $ACB$  и  $BAC$ , если известно, что  $R = (5/2) \cdot BH = (5/4) \cdot OH$ . При необходимости округлите найденное значение до двух знаков после запятой.

**Ответ: 1,09.**

14. В треугольнике  $ABC$  проведена высота  $BH$ , точка  $O$  – центр описанной около него окружности, длина ее радиуса равна  $R$ . Найдите выраженную в радианах величину наименьшего из углов  $ACB$  и  $BAC$ , если известно, что  $R = (5/2) \cdot BH = (5/6) \cdot OH$ . При необходимости округлите найденное значение до двух знаков после запятой.

**Ответ: 0,25.**

15. В треугольнике  $ABC$  проведена высота  $BH$ , точка  $O$  – центр описанной около него окружности, длина ее радиуса равна  $R$ . Найдите выраженную в радианах величину наибольшего из углов  $ACB$  и  $BAC$ , если известно, что  $R = (5/3) \cdot BH = (5/6) \cdot OH$ . При необходимости округлите найденное значение до двух знаков после запятой.

**Ответ: 1,97.**



длина ее радиуса равна  $R$ . Найдите выраженную в радианах величину наибольшего из углов  $ACB$  и  $BAC$ , если известно, что  $R = (5/8) \cdot BH = (5/6) \cdot OH$ . При необходимости округлите найденное значение до двух знаков после запятой.

**Ответ:** 1,82.

---

**V.** Летний отдых жители Цветочного города Знайка и Незнайка проводили в большом 15-этажном отеле на берегу моря. Знайка заметил, что все номера комнат от первой до его собственной включительно в сумме в два раза больше суммы всех номеров комнат от первой до той, в которой поселили Незнайку, включительно. Все номера в отеле занумерованы подряд от 1 до 1599 и Знайка живет в комнате с номером, большим 200. Определите, в каком номере живет Знайка.

Если получится несколько значений номеров, то в ответе напишите их сумму. Если таковых номеров нет, то напишите число 0.

---

*Решение.* По условию получаем, что номер комнаты Незнайки  $k$  и номер комнаты Знайки  $n$  удовлетворяют соотношению  $n^2 + n = 2(k^2 + k)$ . После замены  $x = 2k + 1$ ,  $y = 2n + 1$  это соотношение сводится к виду

$$2x^2 - y^2 = 1.$$

Построение всех натуральных решений уравнения основано на следующих элементарных соображениях.

1. Если  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  — два различных решения и  $x_1 < x_2$ , то  $y_1 < y_2$ . Тем самым, на множестве всех натуральных решений  $(x, y)$  уравнения можно ввести естественное упорядочение:  $(x_1, y_1) < (x_2, y_2) \iff \{x_1 < x_2, y_1 < y_2\}$ .
2. Пары  $(1, 1)$  и  $(5, 7)$  являются первым и вторым решениями уравнения (т.е. между этими решениями других решений нет).
3. Если  $(x, y)$  — решение, то пара  $f(x, y) = (3x + 2y, 4x + 3y)$  — тоже решение (причем большее  $(x, y)$ ). Отметим, что  $f(1, 1) = (5, 7)$  и пары  $(1, 1)$ ,  $(5, 7)$  начинают возрастающую последовательность пар решений уравнения.
4. Между парами решений  $(x, y)$  и  $f(x, y)$  в этой цепочке нет других решений уравнения.

Пусть такое решение  $(\alpha, \beta)$  все-таки есть, тогда  $(x, y) < (\alpha, \beta) < f(x, y)$ . Применим ко всем частям этого соотношения отображение  $g$ , обратное к  $f$ :  $g(x, y) = (3x - 2y, -4x + 3y)$ . Выполним такое преобразование столько раз, чтобы вместо  $(x, y)$  получилась пара  $(1, 1)$ , а вместо  $f(x, y)$  — пара  $(5, 7)$ . Но тогда получится, что между парами  $(1, 1)$  и  $(5, 7)$  есть еще одно решение уравнения — получилось противоречие.

**Вывод.** Рекуррентная последовательность пар

$$(x_1, y_1) = (1, 1), \dots, (x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1}) = (3x_k + 2y_k, 4x_k + 3y_k), \dots$$

исчерпывает множество всех натуральных решений уравнения.

Находим несколько первых пар этой последовательности:

$$\begin{aligned} x_2 = 5, y_2 = 7, \quad x_3 = 29, y_3 = 41, \quad x_4 = 169, y_4 = 239, \\ x_5 = 985, y_5 = 1393, \quad x_6 = 5741, y_6 = 8119, \dots \end{aligned}$$

Очевидно, что только пара  $x_5 = 985, y_5 = 1393$  (и соответствующие значения  $k = 492, n = 696$ ) удовлетворяют условиям задачи.

**Ответ:** 696.

□

**V-2.** Летний отдых жители Цветочного города Знайка и Незнайка проводили в большом 15-этажном отеле на берегу моря. Знайка заметил, что все номера комнат от первой до его собственной включительно в сумме в два раза больше суммы всех номеров комнат от первой до той, в которой поселили Незнайку, включительно. Все номера в отеле занумерованы подряд от 1 до 1593 и Знайка живет в комнате с номером, большим 200. Определите, в каком номере живет Незнайка.

Если получится несколько значений номеров, то в ответе напишите их сумму. Если таких номеров нет, то напишите число 0.

**Ответ:** 492.

**V-3.** Летний отдых жители Цветочного города Знайка и Незнайка проводили в большом 25-этажном отеле на берегу моря. Знайка заметил, что все номера комнат от первой до его собственной включительно в сумме в два раза больше суммы всех номеров комнат от первой до той, в которой поселили Незнайку, включительно. Все номера в отеле занумерованы подряд от 1 до 4591 и Знайка живет в комнате с номером, большим 700. Определите, в каком номере живет Знайка.

Если получится несколько значений номеров, то в ответе напишите их сумму. Если таких номеров нет, то напишите число 0.

**Ответ:** 4059.

**V-4.** Летний отдых жители Цветочного города Знайка и Незнайка проводили в большом 25-этажном отеле на берегу моря. Знайка заметил, что все номера комнат от первой до его собственной включительно в сумме в два раза больше суммы всех номеров комнат от первой до той, в которой поселили Незнайку, включительно. Все номера в отеле занумерованы подряд от 1 до 4599 и Знайка живет в комнате с номером, большим 700. Определите, в каком номере живет Незнайка.

Если получится несколько значений номеров, то в ответе напишите их сумму. Если таких номеров нет, то напишите число 0.

**Ответ:** 2870.

**V-5.** Летний отдых жители Цветочного города Знайка и Незнайка проводили в большом 17-этажном отеле на берегу моря. Знайка заметил, что все номера комнат от первой до его собственной включительно в сумме в три раза больше суммы всех номеров комнат от первой до той, в которой поселили Незнайку, включительно. Все номера в отеле занумерованы подряд от 1 до 1799 и Знайка живет в комнате с номером, большим 200. Определите, в каком номере живет Знайка.

Если получится несколько значений номеров, то в ответе напишите их сумму. Если таких номеров нет, то напишите число 0.

*Решение.* По условию получаем, что номер комнаты Незнайки  $k$  и номер комнаты Знайки  $n$  удовлетворяют соотношению  $n^2 + n = 3(k^2 + k)$ . После замены  $x = 2k + 1$ ,  $y = 2n + 1$  это соотношение сводится к виду

$$3x^2 - y^2 = 2.$$

Множество всех натуральных решений уравнения исчерпывает следующая рекуррентная последовательность пар

$$(x_1, y_1) = (1, 1), \dots, (x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1}) = (2x_k + y_k, 3x_k + 2y_k), \dots$$

Находим несколько первых пар этой последовательности:

$$x_2 = 3, y_2 = 5, \quad x_3 = 11, y_3 = 19, \quad x_4 = 41, y_4 = 71, \\ x_5 = 153, y_5 = 265, \quad x_6 = 571, y_6 = 989, \quad x_7 = 2131, y_7 = 3691, \dots$$

Очевидно, что только пара  $x_6 = 571, y_6 = 989$  (и соответствующие значения  $k = 285, n = 494$ ) удовлетворяют условиям задачи.

**Ответ:** 494.

□

**V-6.** Летний отдых жители Цветочного города Знайка и Незнайка проводили в большом 17-этажном отеле на берегу моря. Знайка заметил, что все номера комнат от первой до его собственной включительно в сумме в три раза больше суммы всех номеров комнат от первой до той, в которой поселили Незнайку, включительно. Все номера в отеле занумерованы подряд от 1 до 1781 и Знайка живет в комнате с номером, большим 200. Определите, в каком номере живет Незнайка.

Если получится несколько значений номеров, то в ответе напишите их сумму. Если таких номеров нет, то напишите число 0.

**Ответ:** 285.

**V-7.** Летний отдых жители Цветочного города Знайка и Незнайка проводили в большом 17-этажном отеле на берегу моря. Знайка заметил, что все номера комнат от первой до его собственной включительно в сумме в три раза больше суммы всех номеров комнат от первой до той, в которой поселили Незнайку, включительно. Все номера в отеле занумерованы подряд от 1 до 3791 и Знайка живет в комнате с номером, большим 600. Определите, в каком номере живет Знайка.

Если получится несколько значений номеров, то в ответе напишите их сумму. Если таких номеров нет, то напишите число 0.

**Ответ:** 1845.

**V-8.** Летний отдых жители Цветочного города Знайка и Незнайка проводили в большом 17-этажном отеле на берегу моря. Знайка заметил, что все номера комнат от первой до его собственной включительно в сумме в три раза больше суммы всех номеров комнат от первой до той, в которой поселили Незнайку, включительно. Все номера в отеле занумерованы подряд от 1 до 3799 и Знайка живет в комнате с номером, большим 600. Определите, в каком номере живет Незнайка.

Если получится несколько значений номеров, то в ответе напишите их сумму. Если таких номеров нет, то напишите число 0.

**Ответ:** 1065.

**V-9.** Летний отдых жители Цветочного города Знайка и Незнайка проводили в большом 17-этажном отеле на берегу моря. Знайка заметил, что все номера комнат от первой до его собственной включительно в сумме в полтора раза больше суммы всех номеров комнат от первой до той, в которой поселили Незнайку, включительно. Все номера в отеле занумерованы подряд от 1 до 1799 и Знайка живет в комнате с номером, большим 200. Определите, в каком номере живет Знайка.

Если получится несколько значений номеров, то в ответе напишите их сумму. Если таких номеров нет, то напишите число 0.

*Решение.* По условию получаем, что номер комнаты Незнайки  $k$  и номер комнаты Знайки  $n$  удовлетворяют соотношению  $2(n^2 + n) = 3(k^2 + k)$ . После замены  $x = 2k + 1$ ,  $y = 2n + 1$  это соотношение сводится к виду

$$3x^2 - 2y^2 = 1.$$

Множество всех натуральных решений уравнения исчерпывает следующая рекуррентная последовательность пар

$$(x_1, y_1) = (1, 1), \dots, (x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1}) = (5x_k + 4y_k, 6x_k + 5y_k), \dots$$

Находим несколько первых пар этой последовательности:

$$\begin{aligned} x_2 = 9, y_2 = 11, \quad x_3 = 89, y_3 = 109, \quad x_4 = 881, y_4 = 1079, \\ x_5 = 8721, y_5 = 10681, \dots \end{aligned}$$

Очевидно, что только пара  $x_4 = 881, y_4 = 1079$  (и соответствующие значения  $k = 440, n = 539$ ) удовлетворяют условиям задачи.

**Ответ:** 539.

□

**V-10.** Летний отдых жители Цветочного города Знайка и Незнайка проводили в большом 25-этажном отеле на берегу моря. Знайка заметил, что все номера комнат от первой до его собственной включительно в сумме в полтора раза больше суммы всех номеров комнат от первой до той, в которой поселили Незнайку, включительно. Все номера в отеле занумерованы подряд от 1 до 1795 и Знайка живет в комнате с номером, большим 200. Определите, в каком номере живет Незнайка.

Если получится несколько значений номеров, то в ответе напишите их сумму. Если таковых номеров нет, то напишите число 0.

**Ответ:** 440.

**V-11.** Летний отдых жители Цветочного города Знайка и Незнайка проводили в большом 17-этажном отеле на берегу моря. Знайка заметил, что все номера комнат от первой до его собственной включительно в сумме в полтора раза больше суммы всех номеров комнат от первой до той, в которой поселили Незнайку, включительно. Все номера в отеле занумерованы подряд от 1 до 7799 и Знайка живет в комнате с номером, большим 700. Определите, в каком номере живет Знайка.

Если получится несколько значений номеров, то в ответе напишите их сумму. Если таковых номеров нет, то напишите число 0.

**Ответ:** 5340.

**V-12.** Летний отдых жители Цветочного города Знайка и Незнайка проводили в большом 25-этажном отеле на берегу моря. Знайка заметил, что все номера комнат от первой до его собственной включительно в сумме в полтора раза больше суммы всех номеров комнат от первой до той, в которой поселили Незнайку, включительно. Все номера в отеле занумерованы подряд от 1 до 7812 и Знайка живет в комнате с номером, большим 700. Определите, в каком номере живет Незнайка.

Если получится несколько значений номеров, то в ответе напишите их сумму. Если таковых номеров нет, то напишите число 0.

**Ответ:** 4360.