Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы»

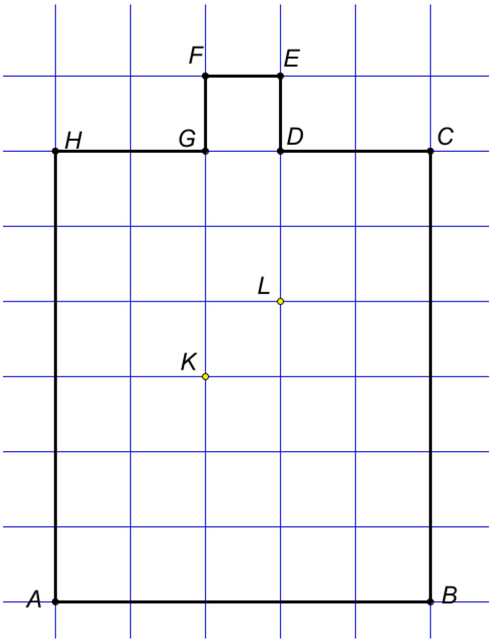
Задания для 7-8 классов

Вариант 1а (Кемерово)

1. В кружок робототехники берут только тех, кто знает математику, физику или программирование. Известно, что 8 членов кружка знают физику, 7 – математику, 11 – программирование. При этом известно, что не мене двоих знают одновременно физику и математику, не менее троих – математику и программирование, и не мене четырех – физику и программирование. Какое наибольшее количество участников кружка может быть при этих условиях?

2.Из последовательности натуральных чисел 1,2,3,… удалили все точные квадраты (квадраты целых чисел). Какое число будет находиться на 2018 месте среди оставшихся?

3. Назовем натуральное число «примечательным», если все его цифры попарно различны и их сумма равна 18. Найдите сумму примечательных чисел, не превосходящих 950.



4. На клетчатой бумаге с размером клетки 1см построен многоугольник *ABCDEFGH* (см.рис.). Назовем *прямоугольной* ломаную проходящую по линиям сетки и не проходящую два раза через одну и ту же точку. Постройте прямоугольную ломаную наибольшей длины с концами в точках K и L, не выходящую за границу *ABCDEFGH*(по самой границе ломаная может проходить). В ответе укажите длину ломаной в см.

5. Назовем число X «20-*подпирающим*», если для любых 20 действительных чисел $a_1, \ldots, a_{20}$, сумма которых является целым числом, найдется хотя бы одно, для которого $\left|a_i - \frac{1}{2}\right| \geq X$.

В ответе укажите наибольшее 20-подпирающее X, округленное до тысячных по стандартным математическим правилам.

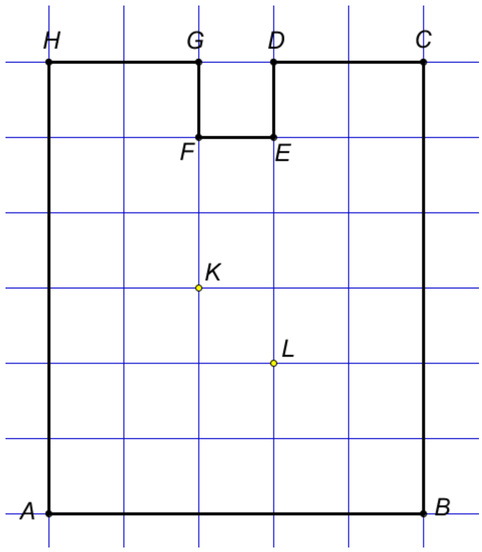
6. Последовательность a_n задана следующим образом:

$a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{2a_n}{n}$, при $n \geq 1$. Найдите a_{100}.

Вариант 2а (Уфа)

1. В музыкальном кружке каждый из участников умеет играть по крайней мере на одном музыкальном инструменте. 8 человек играют на фортепиано, 9 на саксофоне и 11 – на гитаре? Известно, что по крайней мере три человека играют на фортепиано и на гитаре, по крайней мере четверо – на гитаре и саксофоне и по крайней мере один человек – на фортепиано и саксофоне. Какое наибольшее количество участников может быть в кружке при этих условиях?

2. Из последовательности натуральных чисел 1,2,3,… удалили все точные квадраты (квадраты целых чисел). Какое число будет находиться на 2000 месте среди оставшихся?



3. Назовем натуральное число «*занимательным*», если все его цифры попарно различны и их сумма равна 18. Найдите сумму занимательных чисел, не превосходящих 980.

4. На клетчатой бумаге с размером клетки 1см построен многоугольник *ABCDEFGH* (см.рис.). Назовем *прямоугольной* ломаную проходящую по линиям сетки и не проходящую два раза через одну и ту же точку. Постройте прямоугольную ломаную наибольшей длины с концами в точках K и L, не выходящую за границу *ABCDEFGH*(по самой границе ломаная может проходить). В ответе укажите длину ломаной в см.

5. Назовем число X «25-*подпирающим*», если для любых 25 действительных чисел $a_1, \dots, a_{25}$, сумма которых является целым числом, найдется хотя бы одно, для которого $\left|a_i - \frac{1}{2}\right| \geq X$.

В ответе укажите наибольшее 25-подпирающее X, округленное до сотых по стандартным математическим правилам.

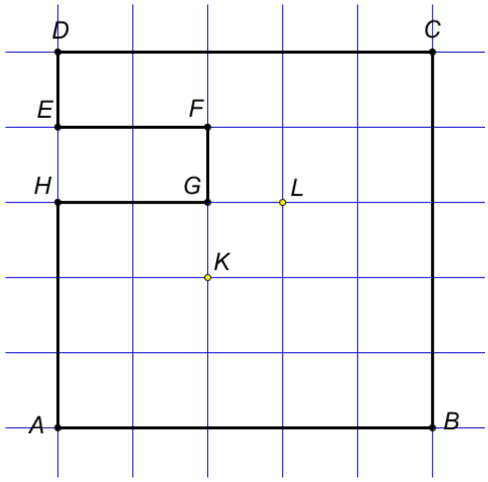
6. Последовательность a_n задана следующим образом:

$a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{2a_n}{n}$, при $n \geq 1$. Найдите a_{200}.

Вариант 3а (Челябинск)

1. Каждый работник на стройке владеет по крайней мере одной строительной специальностью. 10 человек владеют специальностью каменщика, 9 – специальностью маляра, 8 – специальностью штукатура. Известно, что по крайней мере четверо владеют специальностями каменщика и штукатура одновременно, по крайней мере пятеро – специальностями каменщика и маляра и по крайней мере трое – маляра и штукатура? Какое наибольшее количество работников может быть на стройке при этих условиях?

2. Из последовательности натуральных чисел 1,2,3,... удалили все точные квадраты (квадраты целых чисел). Какое число будет находиться на 2600 месте среди оставшихся?



3. Назовем натуральное число «удивительным», если все его цифры попарно различны и их сумма равна 18. Найдите сумму удивительных чисел, не превосходящих 999.

4. На клетчатой бумаге с размером клетки 1см построен многоугольник *ABCDEFGH* (см.рис.). Назовем *прямоугольной* ломаную проходящую по линиям сетки и не проходящую два раза через одну и ту же точку. Постройте прямоугольную ломаную наибольшей длины с концами в точках K и L, не выходящую за границу *ABCDEFGH* (по самой границе ломаная может проходить). В ответе укажите длину ломаной в см.

5. Назовем число X «50-*подпирающим*», если для любых 50 действительных чисел $a_1, \ldots, a_{50}$, сумма которых является целым числом, найдется хотя бы одно, для которого $\left|a_i - \frac{1}{2}\right| \geq X$.

В ответе укажите наибольшее 50-подпирающее X, округленное до сотых   по стандартным математическим правилам.

6. Последовательность a_n задана следующим образом:

$a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{2a_n}{n}$, при $n \geq 1$. Найдите a_{999}.

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы»

Задания для 7-8 классов

Вариант 1b (Железноводск)

1. В кружок робототехники берут только тех, кто знает математику, физику или программирование. Известно, что 8 членов кружка знают физику, 7 – математику, 11 – программирование. При этом известно, что не мене двоих знают одновременно физику и математику, не менее троих – математику и программирование, и не мене четырех – физику и программирование. Какое наибольшее количество участников кружка может быть при этих условиях?

2 Натуральные числа, у которых сумма цифр равна 5, упорядочили по возрастанию. Какое число стоит на 111-м месте?

3. Тринадцать миллионеров приехали на экономический форум и поселились в отеле «Super Luxury+». В отеле есть номера 3 различных типов: 6-звездочные, 7-звездочные, и 8-звездочные. Надо расселить миллионеров, причем так, чтобы использовать все три типа номеров (т.е. хотя бы одного человека поселить в 6-звездочный номер, хотя бы одного в 7-звездочный и хотя бы одного в 8-звездочный). При этом нельзя более богатого миллионера селить в номер с меньшим количеством звездочек, чем у менее богатого.

Сколькими способами их можно расселить (состояния у всех миллионеров попарно разные)?

4. На прямой расположены 15 точек A_1, …A_{15}, идущие с промежутками 1см. Петя строит окружности по следующим правилам:

a) Окружности не пересекаются и не касаются.

b) Внутри каждой окружности есть по крайней мере одна из указанных точек A_1, …A_{15}.

c) Ни одна из этих точек не лежит на окружности

d) Различные окружности содержат внутри себя различные наборы точек. Т.е. например, если какая-то окружность содержит точки A_1 и A_2 внутри, .а остальные снаружи, то вторую окружность, содержащую только A_1 и A_2 внутри построить уже нельзя.

Какое наибольшее количество окружностей Петя сможет построить по этим правилам?

5. Назовем число X «20-*подпирающим*», если для любых 20 действительных чисел $a_1, \dots, a_{20}$, сумма которых является целым числом, найдется хотя бы одно, для которого $\left|a_i - \frac{1}{2}\right| \geq X$.

В ответе укажите наибольшее 20-подпирающее X, округленное до тысячных по стандартным математическим правилам.

6. Последовательность a_n задана следующим образом:

$a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + \frac{2a_n}{n}$, при $n \geq 1$. Найдите a_{100}.

Вариант 2b (Саратов)

1. В музыкальном кружке каждый из участников умеет играть по крайней мере на одном музыкальном инструменте. 8 человек играют на фортепиано, 9 на саксофоне и 11 – на гитаре? Известно, что по крайней мере три человека играют на фортепиано и на гитаре, по крайней мере четверо – на гитаре и саксофоне и по крайней мере один человек – на фортепиано и саксофоне. Какое наибольшее количество участников может быть в кружке при этих условиях?

2. Натуральные числа, у которых сумма цифр равна 5, упорядочили по возрастанию. Какое число стоит на 121-м месте?

3. У Феоктиста Аристарховича есть 14 китайских ваз династии Цин, причем никакие две не были сделаны в один год. Вазы надо распределить по трем полках, причем на каждую полку надо поставить хотя бы одну вазу и нельзя более древнюю вазу ставить ниже, чем менее древнюю. Найдите количество таких способов расстановки, если порядок ваз на одной полке не учитывается.

4. На прямой расположены 14 точек A_1, …A_{14}, идущие с промежутками 1см. Коля строит окружности по следующим правилам:

a) Окружности не пересекаются и не касаются.

b) Внутри каждой окружности есть по крайней мере одна из указанных точек A_1, …A_{14}.

c) Ни одна из этих точек не лежит на окружности

d) Различные окружности содержат внутри себя различные наборы точек. Т.е. например, если какая-то окружность содержит точки A_1 и A_2 внутри, .а остальные снаружи, то вторую окружность, содержащую только A_1 и A_2 внутри построить уже нельзя.

Какое наибольшее количество окружностей Коля сможет построить по этим правилам?

5. Назовем число X «25-*подпирающим*», если для любых 25 действительных чисел $a_1, \dots, a_{25}$, сумма которых является целым числом, найдется хотя бы одно, для которого $\left|a_i - \frac{1}{2}\right| \geq X$.

В ответе укажите наибольшее 25-подпирающее X, округленное до сотых по стандартным математическим правилам.

6. Последовательность a_n задана следующим образом:

$a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + \frac{2a_n}{n}$, при $n \geq 1$. Найдите a_{200}.

Вариант 3b (Москва)

1. Каждый работник на стройке владеет по крайней мере одной строительной специальностью. 10 человек владеют специальностью каменщика, 9 – специальностью маляра, 8 – специальностью штукатура. Известно, что по крайней мере четверо владеют специальностями каменщика и штукатура одновременно, по крайней мере пятеро – специальностями каменщика и маляра и по крайней мере трое – маляра и штукатура? Какое наибольшее количество работников может быть на стройке при этих условиях?

2. Натуральные числа, у которых сумма цифр равна 5, упорядочили по возрастанию. Какое число стоит на 122-м месте?

3. Школьный тренер решил наградить 12 школьников, которые пробежали дистанцию за лучшее время. Каждого из них надо наградить «золотой», «серебряной» или «бронзовой» медалью. Надо использовать все три типа медалей (хотя бы по одному разу), причем того, кто пришел к финишу раньше нельзя награждать менее ценной медалью, чем того, кто пришел позже.

Сколькими способами тренер может распределить медали (время у всех бегунов разное)?

4. На прямой расположены 16 точек A_1, …A_{16}, идущие с промежутками 1см. Миша строит окружности по следующим правилам:

a) Окружности не пересекаются и не касаются.

b) Внутри каждой окружности есть по крайней мере одна из указанных точек A_1, …A_{16}.

c) Ни одна из этих точек не лежит на окружности

d) Различные окружности содержат внутри себя различные наборы точек. Т.е. например, если какая-то окружность содержит точки A_1 и A_2 внутри, .а остальные снаружи, то вторую окружность, содержащую только A_1 и A_2 внутри построить уже нельзя.

Какое наибольшее количество окружностей Миша сможет построить по этим правилам?

5. Назовем число X «50-*подпирающим*», если для любых 50 действительных чисел $a_1, \ldots, a_{50}$, сумма которых является целым числом, найдется хотя бы одно, для которого $\left|a_i - \frac{1}{2}\right| \geq X$.

В ответе укажите наибольшее 50-подпирающее X, округленное до сотых по стандартным математическим правилам.

6. Последовательность a_n задана следующим образом:

$a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + \frac{2a_n}{n}$, при $n \geq 1$. Найдите a_{999}.