Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы»

Задания для 9 класса

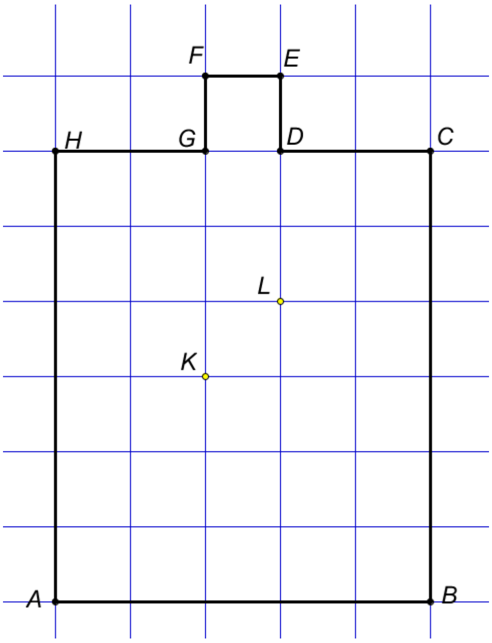
Вариант 1а (Кемерово)

1.Из последовательности натуральных чисел 1,2,3,… удалили все точные квадраты (квадраты целых чисел). Какое число будет находиться на 2018 месте среди оставшихся?

Ответ: 2063.

2. Назовем натуральное число «примечательным», если все его цифры попарно различны и их сумма равна 18. Найдите сумму примечательных чисел, не превосходящих 950.

Ответ: 24102.



3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1см построен многоугольник *ABCDEFGH* (см.рис.). Назовем *прямоугольной* ломаную проходящую по линиям сетки и не проходящую два раза через одну и ту же точку. Постройте прямоугольную ломаную наибольшей длины с концами в точках K и L, не выходящую за границу *ABCDEFGH*(по самой границе ломаная может проходить). В ответе укажите длину ломаной в см.

4. Назовем число X «20-*подпирающим*», если для любых 20 действительных чисел $a_1, \dots, a_{20}$, сумма которых является целым числом, найдется хотя бы одно, для которого $\left|a_i - \frac{1}{2}\right| \geq X$.

В ответе укажите наибольшее 20-подпирающее X, округленное до тысячных по стандартным математическим правилам.

Ответ $\mathbf{\frac{1}{40} = 0.025}$.

5. Последовательность a_n задана следующим образом:

$a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{2a_n}{n}$, при $n \geq 1$. Найдите a_{100}.

Ответ: 5050.

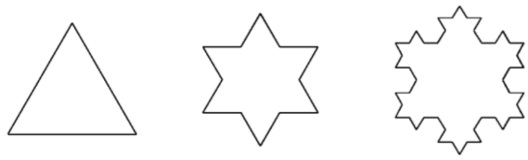
6. Назовем «зазубриванием» следующую операцию над многоугольником:

а) Каждую сторону многоугольника делим на три равные части.

б) Среднюю часть выбираем в качестве основания равностороннего треугольника, расположенного снаружи многоугольника.

в) Удаляем основание и добавляем две другие стороны.

Пусть M_0 – равносторонний треугольник, M_1 – многоугольник, полученный путем зазубривания M_0, M_2 – получен зазубриванием M_1,…, M_{2018} получен зазубриванием M_{2017} .



На рисунке изображены M_0, M_1 и M_2.

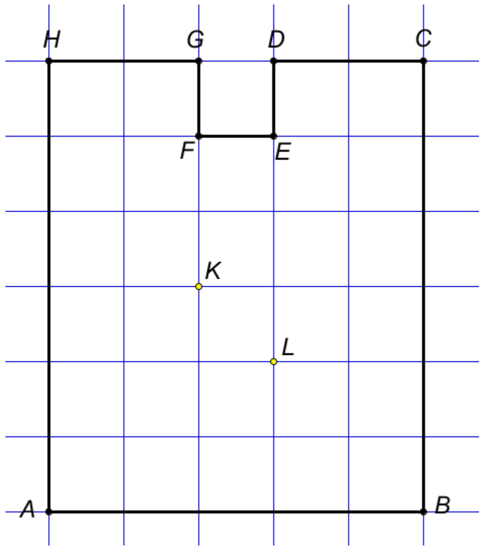
Найдите S(M_{2018}) если известно, что S(M_0)=3. В ответе укажите значение S(M_{2018}), округленное до сотых.

Ответ: 4.8.

Вариант 2а (Уфа)

1. Из последовательности натуральных чисел 1,2,3,… удалили все точные квадраты (квадраты целых чисел). Какое число будет находиться на 2000 месте среди оставшихся?

Ответ: 2045.



2. Назовем натуральное число «*занимательным*», если все его цифры попарно различны и их сумма равна 18. Найдите сумму занимательных чисел, не превосходящих 980.

Ответ: 26991.

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1см построен многоугольник *ABCDEFGH* (см.рис.). Назовем *прямоугольной* ломаную проходящую по линиям сетки и не проходящую два раза через одну и ту же точку. Постройте прямоугольную ломаную наибольшей длины с концами в точках K и L, не выходящую за границу *ABCDEFGH*(по самой границе ломаная может проходить). В ответе укажите длину ломаной в см.

Ответ 40.

4. Назовем число X «25-*подпирающим*», если для любых 25 действительных чисел $a_1, \ldots, a_{25}$, сумма которых является целым числом, найдется хотя бы одно, для которого $\left|a_i - \frac{1}{2}\right| \geq X$.

В ответе укажите наибольшее 25-подпирающее X, округленное до сотых по стандартным математическим правилам.

Ответ $\mathbf{\frac{1}{50} = 0.02}$.

6. Последовательность a_n задана следующим образом:

$a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{2a_n}{n}$, при $n \geq 1$. Найдите a_{200}.

Ответ: 20100.

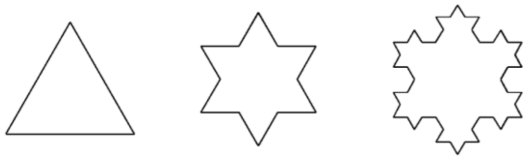
6. Назовем «зазубриванием» следующую операцию над многоугольником:

а) Каждую сторону многоугольника делим на три равные части.

б) Среднюю часть выбираем в качестве основания равностороннего треугольника, расположенного снаружи многоугольника.

в) Удаляем основание и добавляем две другие стороны.

Пусть M_0 – равносторонний треугольник, M_1 – многоугольник, полученный путем зазубривания M_0, M_2 – получен зазубриванием M_1,…, M_{2018} получен зазубриванием M_{2017} .



На рисунке изображены M_0, M_1 и M_2.

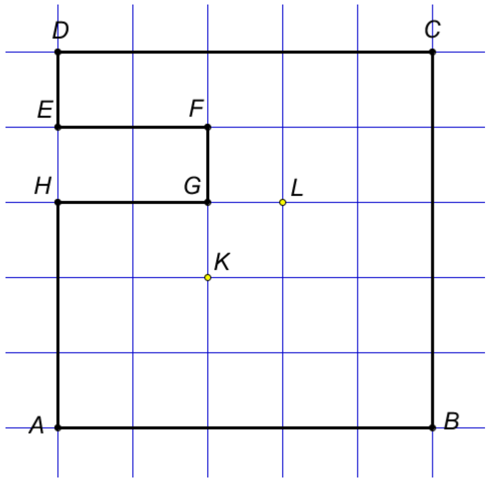
Найдите S(M_{2018}) если известно, что S(M_0)=2. В ответе укажите значение S(M_{2000}), округленное до сотых.

Ответ: 3.2.

Вариант 3а (Челябинск)

1. Из последовательности натуральных чисел 1,2,3,… удалили все точные квадраты (квадраты целых чисел). Какое число будет находиться на 2600 месте среди оставшихся?

Ответ: 2651.



2. Назовем натуральное число «удивительным», если все его цифры попарно различны и их сумма равна 18. Найдите сумму удивительных чисел, не превосходящих 999.

Ответ : 27972.

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1см построен многоугольник *ABCDEFGH* (см.рис.). Назовем *прямоугольной* ломаную проходящую по линиям сетки и не проходящую два раза через одну и ту же точку. Постройте прямоугольную ломаную наибольшей длины с концами в точках K и L, не выходящую за границу *ABCDEFGH* (по самой границе ломаная может проходить). В ответе укажите длину ломаной в см.

4. Назовем число X «50-*подпирающим*», если для любых 50 действительных чисел $a_1, \dots, a_{50}$, сумма которых является целым числом, найдется хотя бы одно, для которого $\left|a_i - \frac{1}{2}\right| \geq X$.

В ответе укажите наибольшее 50-подпирающее X, округленное до сотых по стандартным математическим правилам.

Ответ $\mathbf{\frac{1}{100} = 0.01}$.

5. Последовательность a_n задана следующим образом:

$a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{2a_n}{n}$, при $n \geq 1$. Найдите a_{999}.

Ответ: 499500.

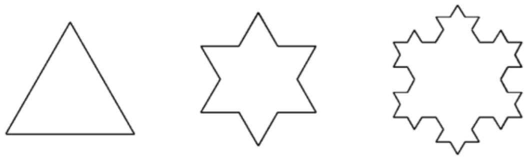
6. Назовем «зазубриванием» следующую операцию над многоугольником (см. рис.):

а) Каждую сторону многоугольника делим на три равные части.

б) Среднюю часть выбираем в качестве основания равностороннего треугольника, расположенного снаружи многоугольника.

в) Удаляем основание и добавляем две другие стороны.

Пусть M_0 – равносторонний треугольник, M_1 – многоугольник, полученный путем зазубривания M_0, M_2 – получен зазубриванием M_1,…, M_{2018} получен зазубриванием M_{2017} .



На рисунке изображены M_0, M_1 и M_2.

Найдите S(M_{2018}) если известно, что S(M_0)=4. В ответе укажите значение S(M_{1000}), округленное до сотых.

Ответ: 6.4.

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы»

Задания для 9 класса

Вариант 1b (Железноводск)

1. Натуральные числа, у которых сумма цифр равна 5, упорядочили по возрастанию. Какое число стоит на 111-м месте?

Ответ: 23000.

2. Тринадцать миллионеров приехали на экономический форум и поселились в отеле «Super Luxury+». В отеле есть номера 3 различных типов: 6-звездочные, 7-звездочные, и 8-звездочные. Надо расселить миллионеров, причем так, чтобы использовать все три типа номеров (т.е. хотя бы одного человека поселить в 6-звездочный номер, хотя бы одного в 7-звездочный и хотя бы одного в 8-звездочный). При этом нельзя более богатого миллионера селить в номер с меньшим количеством звездочек, чем у менее богатого.

Сколькими способами их можно расселить (состояния у всех миллионеров попарно разные)?

Ответ: C_{12}^{2}=66.

3. На прямой расположены 15 точек A_1, …A_{15}, идущие с промежутками 1см. Петя строит окружности по следующим правилам:

a) Окружности не пересекаются и не касаются.

b) Внутри каждой окружности есть по крайней мере одна из указанных точек A_1, …A_{15}.

c) Ни одна из этих точек не лежит на окружности

d) Различные окружности содержат внутри себя различные наборы точек. Т.е. например, если какая-то окружность содержит точки A_1 и A_2 внутри, .а остальные снаружи, то вторую окружность, содержащую только A_1 и A_2 внутри построить уже нельзя.

Какое наибольшее количество окружностей Петя сможет построить по этим правилам?

Ответ: 29.

4. Назовем число X «20-*подпирающим*», если для любых 20 действительных чисел $a_1, \dots, a_{20}$, сумма которых является целым числом, найдется хотя бы одно, для которого $\left|a_i - \frac{1}{2}\right| \geq X$.

В ответе укажите наибольшее 20-подпирающее X, округленное до тысячных по стандартным математическим правилам.

Ответ $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{40}} = \mathbf{0.025}$.

5. Последовательность a_n задана следующим образом:

$a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + \frac{2a_n}{n}$, при $n \geq 1$. Найдите a_{100}.

Ответ: 10100.

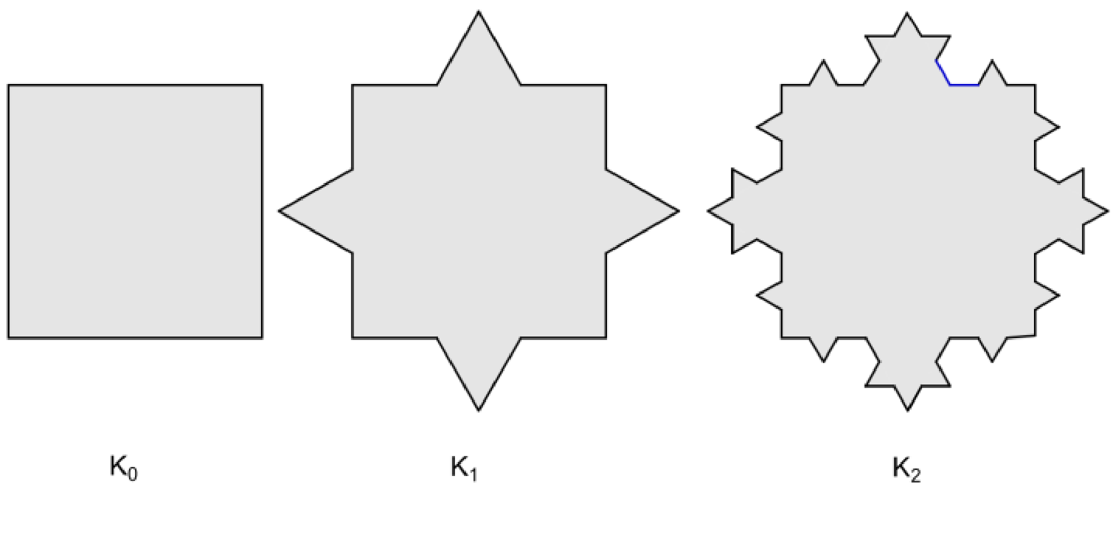
6. Назовем «зазубриванием» следующую операцию над многоугольником:

а) Каждую сторону многоугольника делим на три равные части.

б) Среднюю часть выбираем в качестве основания равностороннего треугольника, расположенного снаружи многоугольника.

в) Удаляем основание и добавляем две другие стороны.

Пусть K_0 – квадрат со стороной 2, K_1 – многоугольник, полученный путем зазубривания K_0, K_2 – получен зазубриванием K_1, …, K_{2018} получен зазубриванием K_{2017} (см. рис.).
Найдите площадь S(K_{2018}) . Ответ округлите до сотых по стандартным математически правилам.



Ответ: 6.4.

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы»

Задания для 9 класса

Вариант 2b (Саратов)

1. Натуральные числа, у которых сумма цифр равна 5, упорядочили по возрастанию. Какое число стоит на 121-м месте?

Ответ: 32000.

2. У Феоктиста Аристарховича есть 14 китайских ваз династии Цин, причем никакие две не были сделаны в один год. Вазы надо распределить по трем полках, причем на каждую полку надо поставить хотя бы одну вазу и нельзя более древнюю вазу ставить ниже, чем менее древнюю. Найдите количество таких способов расстановки, если порядок ваз на одной полке не учитывается.

Ответ: 78.

3. На прямой расположены 14 точек A_1, …A_{14}, идущие с промежутками 1см. Коля строит окружности по следующим правилам:

a) Окружности не пересекаются и не касаются.

b) Внутри каждой окружности есть по крайней мере одна из указанных точек A_1, …A_{14}.

c) Ни одна из этих точек не лежит на окружности

d) Различные окружности содержат внутри себя различные наборы точек. Т.е. например, если какая-то окружность содержит точки A_1 и A_2 внутри, .а остальные снаружи, то вторую окружность, содержащую только A_1 и A_2 внутри построить уже нельзя.

Какое наибольшее количество окружностей Коля сможет построить по этим правилам?

Ответ: 27.

4. Назовем число X «25-*подпирающим*», если для любых 25 действительных чисел $a_1, \ldots, a_{25}$, сумма которых является целым числом, найдется хотя бы одно, для которого $\left|a_i - \frac{1}{2}\right| \geq X$.

В ответе укажите наибольшее 25-подпирающее X, округленное до сотых по стандартным математическим правилам.

Ответ $\boldsymbol{\frac{1}{50} = 0.02}$.

5. Последовательность a_n задана следующим образом:

$a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + \frac{2a_n}{n}$, при $n \geq 1$. Найдите a_{200}.

Ответ: 40200.

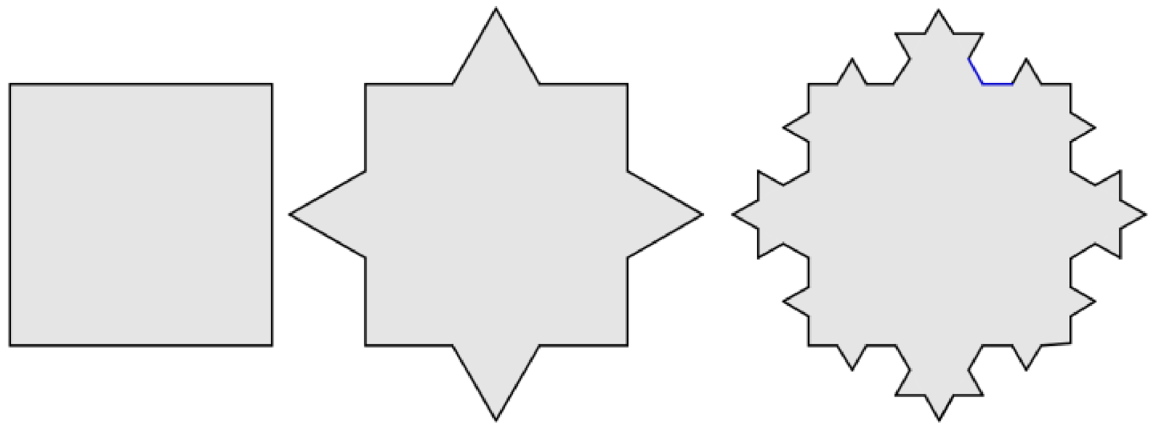
6. Назовем «зазубриванием» следующую операцию над многоугольником:

а) Каждую сторону многоугольника делим на три равные части.

б) Среднюю часть выбираем в качестве основания равностороннего треугольника, расположенного снаружи многоугольника.

в) Удаляем основание и добавляем две другие стороны.

Пусть K_0 – квадрат со стороной 3, K_1 – многоугольник, полученный путем зазубривания K_0, K_2 – получен зазубриванием K_1,..., K_{2018} получен зазубриванием K_{2017} (см. рис.). Найдите площадь $S(K_{2018})$. Ответ округлите до сотых по стандартным математически правилам.



K_0 K_1 K_2

Ответ: 14.4.

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы»

Задания для 9 класса

Вариант 3b (Москва)

1. Натуральные числа, у которых сумма цифр равна 5, упорядочили по возрастанию. Какое число стоит на 122-м месте?

Ответ: 40001.

2. Школьный тренер решил наградить 12 школьников, которые пробежали дистанцию за лучшее время. Каждого из них надо наградить «золотой», «серебряной» или «бронзовой» медалью. Надо использовать все три типа медалей, причем того, кто пришел к финишу раньше нельзя награждать менее ценной медалью, чем того, кто пришел позже.

Сколькими способами тренер может распределить медали (время у всех бегунов разное)?

Ответ: C_{11}^{2} = 55.

3. На прямой расположены 16 точек $A_1, \ldots A_{16}$, идущие с промежутками 1см. Миша строит окружности по следующим правилам:

a) Окружности не пересекаются и не касаются.

b) Внутри каждой окружности есть по крайней мере одна из указанных точек $A_1, \ldots A_{16}$.

c) Ни одна из этих точек не лежит на окружности

d) Различные окружности содержат внутри себя различные наборы точек. Т.е. например, если какая-то окружность содержит точки A_1 и A_2 внутри, .а остальные снаружи, то вторую окружность, содержащую только A_1 и A_2 внутри, построить уже нельзя.

Какое наибольшее количество окружностей Миша сможет построить по этим правилам?

Ответ: 31.

4. Назовем число X «50-*подпирающим*», если для любых 50 действительных чисел $a_1, \ldots, a_{50}$, сумма которых является целым числом, найдется хотя бы одно, для которого $\left|a_i - \frac{1}{2}\right| \geq X$.

В ответе укажите наибольшее 50-подпирающее X, округленное до сотых по стандартным математическим правилам.

Ответ $\frac{1}{100} = \mathbf{0.01}$.

5. Последовательность a_n задана следующим образом:

$a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + \frac{2a_n}{n}$, при $n \geq 1$. Найдите a_{999}.

Ответ: 999000.

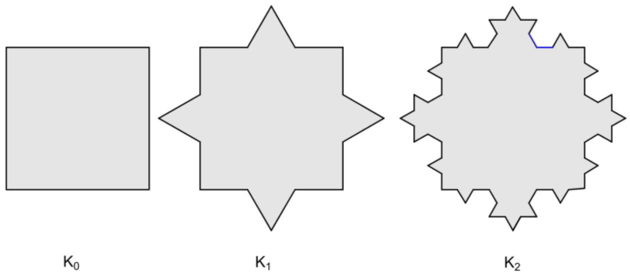
6. Назовем «зазубриванием» следующую операцию над многоугольником (см. рис.):

а) Каждую сторону многоугольника делим на три равные части.

б) Среднюю часть выбираем в качестве основания равностороннего треугольника, расположенного снаружи многоугольника.

в) Удаляем основание и добавляем две другие стороны.

Пусть K_0 – квадрат со стороной 2.5, K_1 – многоугольник, полученный путем зазубривания K_0, K_2 – получен зазубриванием K_1,..., K_{2018} получен зазубриванием K_{2017} (см. рис.).
Найдите площадь $S(K_{2018})$. Ответ округлите до сотых по стандартным математически правилам.



Ответ: 10.