

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Заключительный этап 2016/2017 учебного года для 10–11 классов по математике

Вариант 171

1. Брюки дешевле куртки, куртка дешевле пальто, пальто дешевле шубы, а шуба дешевле бриллиантового кольца на один и тот же процент. На сколько процентов шуба дороже брюк, если бриллиантовое кольцо дороже пальто в 6,25 раз?

2. В кошельке у купца Ганса лежат 20 серебряных монет по 2 кроны, 15 серебряных монет по 3 кроны и 3 золотых дуката (1 дукат равен 5 крон). Сколькими способами Ганс может уплатить сумму в 10 дукатов? Монеты одного достоинства неразличимы.

3. Определите, при каких значениях n и k уравнение $\sin x + \sin y = \frac{\pi k}{2017}$ является следствием уравнения $x + y = \frac{\pi n}{48}$.

4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC и $\angle ABC = \frac{\pi}{9}$ на стороне AB выбрана точка D так, что $BD = AC$. Найдите величину угла $\angle DCB$ (в радианах) и сравните её с 0,18.

5. Решите неравенство $x + \sqrt{x^2 + 4} \geq (2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 4x + 2}) \cdot 8^{x+1}$.

Март 2017 г.

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Заключительный этап 2016/2017 учебного года для 10–11 классов по математике

Вариант 172

1. Автомобиль Майбах дороже автомобиля Мерседес, Мерседес дороже Тойоты, Тойота дороже Рено, а Рено дороже Лады на один и тот же процент. На сколько процентов Лада дешевле Мерседеса, если Тойота дешевле Майбаха в $2\frac{7}{9}$ раз?

2. В сундуке у пирата Джима лежат 20 серебряных монет по 3 талера, 10 серебряных монет по 4 талера и 4 золотых дублона (1 дублон равен 10 талеров). Сколькими способами Джим может уплатить сумму в 7 дублонов? Монеты одного достоинства неразличимы.

3. Определите, при каких значениях n и k уравнение $\cos x - \cos y = \frac{\pi k}{2016}$ является следствием уравнения $x + y = \frac{\pi n}{54}$.

4. В равнобедренном треугольнике KLM с основанием KM и $\angle KLM = \frac{\pi}{9}$ на стороне LM выбрана точка P так, что $LP = KM$. Найдите величину угла $\angle PKL$ (в радианах) и сравните её с $0,17$.

5. Решите неравенство $x + \sqrt{x^2 + 9} \leq (3x + 1 + \sqrt{9x^2 + 6x + 2}) \cdot 81^{2x+1}$.

Март 2017 г.

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Заключительный этап 2016/2017 учебного года для 10–11 классов по математике

Вариант 173

1. Бриллиантовое кольцо дороже шубы, шуба дороже пальто, пальто дороже куртки, а куртка дороже брюк на один и тот же процент. На сколько процентов брюки дешевле шубы, если пальто дешевле бриллиантового кольца в 6,25 раз?

2. В кошельке у купца Майкла лежат 15 серебряных монет по 2 кроны, 20 серебряных монет по 3 кроны и 4 золотых дуката (1 дукат равен 5 крон). Сколькими способами Майкл может уплатить сумму в 11 дукатов? Монеты одного достоинства неразличимы.

3. Определите, при каких значениях n и k уравнение $\sin x + \sin y = \frac{\pi k}{2017}$ является следствием уравнения $x + y = \frac{\pi n}{44}$.

4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC и $\angle CAB = \frac{\pi}{9}$ на стороне AC выбрана точка D так, что $AD = BC$. Найдите величину угла $\angle DBA$ (в радианах) и сравните её с 0,18.

5. Решите неравенство $\sqrt{x^2 + 4} - x \leq (\sqrt{4x^2 - 4x + 2} - 2x + 1) \cdot 8^{1-x}$.

Март 2017 г.

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Заключительный этап 2016/2017 учебного года для 10–11 классов по математике

Вариант 174

1. Автомобиль Лада дешевле автомобиля Рено, Рено дешевле Тойоты, Тойота дешевле Мерседеса, а Мерседес дешевле Майбаха на один и тот же процент. На сколько процентов Мерседес дороже Лады, если Майбах дороже Тойоты в 2,56 раз?

2. В сундуке у пирата Джона лежат 20 серебряных монет по 3 талера, 15 серебряных монет по 4 талера и 4 золотых дублона (1 дублон равен 10 талеров). Сколькими способами Джон может уплатить сумму в 8 дублонов? Монеты одного достоинства неразличимы.

3. Определите, при каких значениях n и k уравнение $\cos x - \cos y = \frac{\pi k}{2016}$ является следствием уравнения $x + y = \frac{\pi n}{56}$.

4. В равнобедренном треугольнике KLM с основанием ML и $\angle MKL = \frac{\pi}{9}$ на стороне LK выбрана точка P так, что $KP = ML$. Найдите величину угла $\angle PMK$ (в радианах) и сравните её с 0,17.

5. Решите неравенство $\sqrt{x^2 + 9} - x \geq (\sqrt{9x^2 - 6x + 2} - 3x + 1) \cdot 81^{1-2x}$.

Март 2017 г.

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

Вариант 1–1 (Саратов)

1. Сколько натуральных чисел, делящихся на 4 и меньших 1000, не содержат в десятичной записи ни одной из цифр 3, 4, 5, 7 и 9?
2. Между пунктами A и B с постоянной скоростью курсирует один автобус (время на остановки пренебрежимо мало). Из пункта A в пункт B со скоростью 11 км/ч выехал велосипедист и за время пути строго между этими пунктами ровно 5 раз поравнялся с автобусом. В каких пределах может находиться скорость автобуса при этих условиях?
3. В треугольной пирамиде длины перпендикуляров, опущенных из четырех вершин на противоположные грани, равны 3, 4, 7 и $84/37$ соответственно. Найдите радиус вписанного в эту пирамиду шара.
4. Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$a \log_3 x + \log_{1/2} x > 1$$

имеет решения, причем среди решений нет больших 1.

5. Что больше:

$$\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ \quad \text{или} \quad \frac{200}{157}\pi?$$

март 2017 г.

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

Вариант 1–2 (Саратов)

1. Сколько натуральных чисел, делящихся на 4 и меньших 1000, не содержат в десятичной записи ни одной из цифр 1, 6, 8 и 9?
2. Между пунктами A и B со скоростью 45 км/ч курсирует один автобус (время на остановки пренебрежимо мало). Из пункта A в пункт B с постоянной скоростью выбежал курьер и за время пути строго между этими пунктами ровно 7 раз поравнялся с автобусом. В каких пределах может находиться скорость курьера при этих условиях?
3. В треугольной пирамиде длины перпендикуляров, опущенных из четырех вершин на противоположные грани, равны 4, 5, 9 и $180/61$ соответственно. Найдите радиус вписанного в эту пирамиду шара.
4. Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$a \log_5 x + \log_{1/3} x > 1$$

имеет решения, причем среди решений нет меньших 1.

5. Что больше:

$$\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{ctg} 27^\circ - \operatorname{ctg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ \quad \text{или} \quad \frac{80}{63}\pi?$$

март 2017 г.

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»
Вариант 3-1 (Уфа)

1. Решите неравенство

$$3 \sin \left(\frac{2x}{3} \right) \geq 5 - 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{3} \right).$$

2. Медиана AM треугольника ABC перпендикулярна его биссектрисе BL . Найдите площадь треугольника ABM , если площадь треугольника ABL равна 10.

3. Решите неравенство $(\pi - 3)^{\ln(x^2 - 2x)} \leq (2 - x)^{\ln(\pi - 3)}$.

4. Найдите все целочисленные значения a, b, c такие, что существуют три различных корня уравнение $x^3 + (8 + b)x^2 + (b + 4)x + (c + 3) = 0$, которые являются корнями уравнения $x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

5. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ сторона основания равна $\frac{2}{\sqrt{3}}$, а боковая сторона $AA_1 = 2$.

- а. Докажите, что в призму можно вписать шар и найдите его радиус.
- б. Найдите объём наименьшей части шара, которую отсекает плоскость, проходящая через точки B, A_1 и E .

март 2017 г.

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»
Вариант 3-2 (Уфа)

1. Решите неравенство

$$2 \cos \left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} \right) \geq 5 + 3 \sin \left(\frac{2x}{3} \right).$$

2. Биссектриса AL треугольника ABC перпендикулярна его медиане BM . Найдите площадь треугольника ABL , если площадь треугольника ABM равна 12.

3. Решите неравенство $(\pi - 3)^{\ln(x^2 - 1)} \leq (1 - x)^{\ln(\pi - 3)}$.

4. Найдите все целочисленные значения a, b, c такие, что существуют три различных корня уравнение $x^3 + (8 + c)x^2 + (c + 4)x + (b + 3) = 0$, которые являются корнями уравнения $x^4 + 5x^3 + ax^2 + cx + b = 0$.

5. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ сторона основания равна $\frac{2}{\sqrt{3}}$, а боковая сторона $BB_1 = 2$.

- а. Докажите, что в призму можно вписать шар и найдите его радиус.
- б. Найдите объём наибольшей части шара, которую отсекает плоскость, проходящая через точки C, B_1 и F .

март 2017 г.

1. Решите уравнение

$$\log_3(2x^2 + 4x + 29) + \log_{\frac{1}{2}}(31 - 2x - x^2) = \log_{\frac{1}{5}}(3x^2 + 6x + 28).$$

2. Решите неравенство $(\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x})^7 > 1$.

3. Две бригады рабочих выполнили одинаковую работу. Вторая бригада работала на полчаса больше первой. Если бы в первой бригаде было на пять человек больше, то она могла бы закончить работу на два часа раньше. Найдите число рабочих в бригадах, если производительности всех рабочих одинаковы.

4. Продолжение биссектрисы AD треугольника ABC пересекает окружность, описанную вокруг этого треугольника в точке E . Найдите площадь треугольника ABC , если $BC = a$, $\angle BAC = \alpha$, $AE = d$.

5. Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{|x-1|} = \sqrt{3|y|}, \\ x^2 + 9y^2 + a = 2x - 1 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

март 2017 г.

1. Решите уравнение

$$\log_5(3x^2 - 6x + 28) + \log_{\frac{1}{2}}(31 - x^2 + 2x) = \log_{\frac{1}{3}}(2x^2 - 4x + 29).$$

2. Решите неравенство $(\sqrt{\sin(-x)} + \sqrt{\cos(-x)})^5 > 1$.

3. Две бригады рабочих выполнили одинаковую работу. Вторая бригада работала на полчаса больше первой. Если бы в первой бригаде было на пять человек больше, то она могла бы закончить работу на два часа раньше. Найдите число рабочих в бригадах, если производительности всех рабочих одинаковы.

4. Продолжение биссектрисы AD треугольника ABC пересекает окружность, описанную вокруг этого треугольника в точке E . Найдите площадь треугольника ABC , если $BC = a$, $\angle BAC = \alpha$, $DE = e$.

5. Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{5|x|} = \sqrt{|y-2|}, \\ 25x^2 + y^2 - 2a = 4y - 4 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

март 2017 г.

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»
Вариант 5-1 (Екатеринбург)

1. Решите уравнение

$$\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = \frac{12}{\cos 2x}.$$

2. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если её второй член равен 3, а сумма первых трёх её членов равна 13.

3. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена высота CK . Периметр треугольника ABC равен 13, а периметр треугольника BCK равен 5. Найдите периметр треугольника ACK .

4. Скорость парама линейно зависит от веса переправляемого груза так, что при нагрузке в 50 тонн скорость на 10% больше, чем при нагрузке в 60 тонн. При нагрузке в 70 тонн скорость парама равна 6 км/час. Найдите скорость парама при наибольшем грузообороте. Грузооборотом называется произведение скорости (в км/час) парама на вес перевозимого груза (в тоннах).

5. На координатной плоскости изобразите множество точек (a, b) , для каждой из которой область определения функции

$$f(x) = \log_{\frac{2a-b-x}{2a-b+x}} \left(\frac{x-a-b}{x+a+b} \right)$$

не содержит ни одной точки из отрезка $[1; 2]$.

март 2017г.

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»
Вариант 5-2 (Екатеринбург)

1. Решите уравнение

$$\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 4\sqrt{2} \operatorname{ctg} 2x.$$

2. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если её третий член равен 4, а сумма первых двух её членов равна 8.

3. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена высота CK . Периметр треугольника ACK равен 3, а периметр треугольника BCK равен 4. Найдите периметр треугольника ABC .

4. Скорость товарного поезда линейно зависит от количества вагонов. Известно, что скорость состава из 60 вагонов равна $2/3$ от скорости состава из 40 вагонов. Тепловозная бригада выполняет план по грузообороту на 100%, если поезд состоит из 45 вагонов. На сколько процентов будет выполняться план при наибольшем грузообороте? Грузооборотом называется произведение числа вагонов на скорость поезда.

5. На координатной плоскости изобразите множество точек (a, b) , для каждой из которой область определения функции (возможно пустое множество)

$$f(x) = \log_{\frac{a-b-x}{a-b+x}} \left(\frac{2a+b-x}{2a+b+x} \right)$$

содержится внутри отрезка $[-4; 4]$.

март 2017г.