Все задания оценивались по 15 баллов.

9 класс

Вариант 3-b

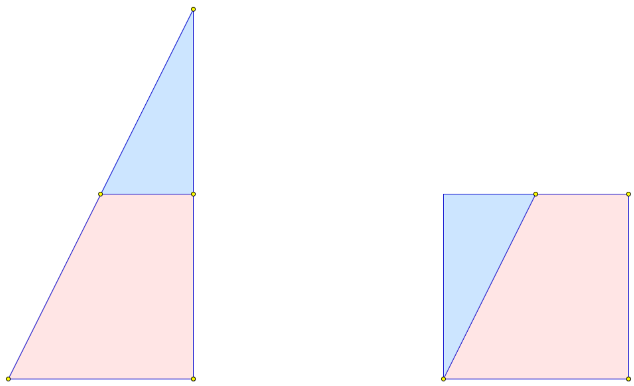
14. Назовем целое число «необыкновенным», если оно имеет ровно один четный делитель, не равный 2. Сколько существует необыкновенных чисел на отрезке [1;75]?

    Ответ:12

    Решение: Это число должно быть равно простому, умноженному на 2. Таких чисел 12:

    2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37

15. Прямоугольный треугольник разрезали по прямой на две части и сложили из них квадрат(см. рис). Чему равен меньший катет, если больший равен 10?



Ответ 5.

Решение: Короткий катет равен стороне квадрата, а длинный – удвоенной стороне квадарта.

16. Пиратская шхуна взяла торговое судно на абордаж. Десять пиратов не участвовали в бою, а остальные потеряли в бою либо руку, либо ногу, либо и руку и ногу одновременно. 54% участников боя потеряли руку, а 34% - руку и ногу. Известно, что 2/3 всех пиратов, бывших на шхуне потеряли ногу. Сколько пиратов находилось на шхуне?

    Ответ: 60 пиратов.

    Решение – аналогично варианту v3a.

17. В правильном 1000-угольнике провели все диагонали. Какое наибольшее количество диагоналей можно выбрать так, чтобы среди любых трех из выбранных диагоналей по крайней мере две имели одинаковую длину?

    Ответ: 2000

    Решение: Для того, чтобы выполнялось условие задачи, необходимо, чтобы длины диагоналей принимали не более двух различыных значений. Диагоналей, соединяющих диаметрально противоположные вершины 500. Любую другую диагональ можно поворотом наложить на диагональ соответствующей длины, т.е. их по 1000 штук. значит можно выбрать 2000 с соблюдением условия.

18. Сколькими способами можно разложить число 1024 на три натуральных множителя, так, чтобы первый множитель был кратен второму, а второй – третьему?

    Ответ: 14

    Решение: Заметим, что множители имеют вид $2^a \times 2^b \times 2^c$, где a+b+c=10 и $a \geq b \geq c$. Очевидно, что с меньше 4,т.к. сумма была бы больше 10. Рассмотрим случаи:

c=0) Тодга b=0,…,5, a=10-b – 6 вариантов

c=1) Тогда b = 1,..,4, a=9-b – 4 вар.

c=2) b=2,3, 4, a=8-b – 3 вар.

c=3) b=3, a=4 – 1 вар.

итого 6+4+3+1 = 14 вариантов.

В трапеции, диагонали которой пересекаются под прямым углом известно, что средняя линия равна 6,5 а одна из диагоналей равна 12. Найдите вторую диагональ

Ответ 5

Решение: Параллельно перенесем одну из диагоналей так, чтобы она образовала с другой прямоугольный треугольник. Тогда в нем один катет равен 12, а гипотенуза равна 13, следовательно, оставшийся катет равен 5.

19. Найдите последние две цифры суммы

    $1^2+2^2+\ldots+50^2-51^2-\ldots-100^2+101^2+\ldots150^2-151^2-\ldots200^2+\ldots-2000^2+2001^2+\ldots+2017^2$

    (т.е. 50 чисел «с плюсом», 50 – «с минусом», и т.д.)

    Ответ: 85

    Решение: Заметим, что числа n^2 и $(n+50)^2$ дают одинаковые остатки при делении на 100.

    Поэтому в каждой сотне сумма будет оканчиваться на два нуля. А последние цифры квадратов от 2001 до 2017 равны:

    01 04 09 16 25 36 49 64 81 00 21 44 69 96 25 56 89, что в сумме дает 685.

20. Найдите сумму четвертых степеней действительных корней уравнения $x^4 - 1000x^2 + 2017 = 0$.

Ответ: 1991932

Решение: Корни уравнения имеют вид $\pm\sqrt{t_1}, \pm\sqrt{t_2}$, где $t_{1,2}$ - корни уравнения $t^2 - 1000t + 2017 = 0$. Значит сумма 4-х степеней равна $2(t_1^2 + t_2^2) = 2(t_1 + t_2)^2 - 4t_1t_2 = 2 \cdot 1000^2 - 4 \cdot 2017 = 1991932$ – тут мы воспользовались т. Виета.

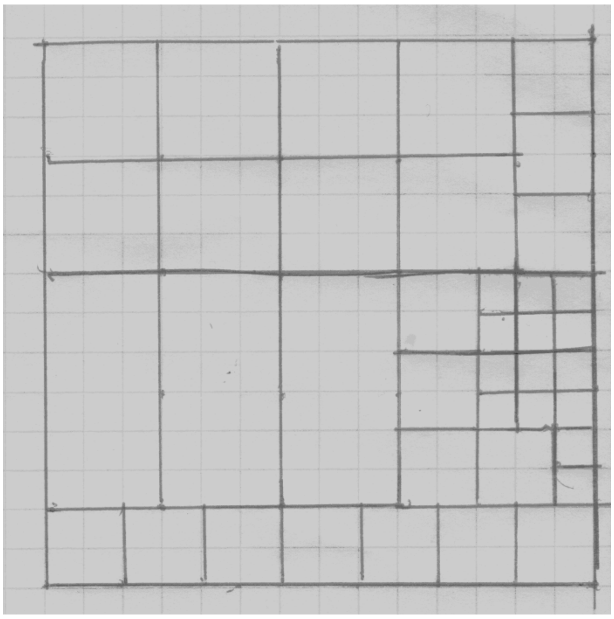
Вариант 3-а

1. Назовем число «замечательным», если оно имеет ровно 4 различных натуральных делителя, причем среди них найдутся два, такие, что ни один не кратен другому. Сколько существует «замечательных» двузначных чисел?

   Ответ 36.

Решение: Такие числа обязательно имеют вид $p_1 \cdot p_2$, где p_1, p_2 - простые числа. Заметим, что меньшее из этих простых чисел не может быть больше 7, т.к. тогда произведение будет не менее 121. Достаточно перебрать $p_1 = 2,3,5,7$. Для 2 получаем второй множитель: 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, или 47 - 14 вариантов, для 3 получаем : 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 – 10 вариантов, для 5 - : 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, - 7 вариантов и для 7: 3, 5, 7, 11, 13, - 5 вариантов. Всего 14+10+7+5 = 36 вариантов.

2. Сложить квадрат наименьшей площади из квадратиков размера 1x1, 2x2 и 3x3, так чтоб количество квадратиков каждого размера было одинаковым.



Ответ:

Решение. Обозначим за n число квадратиков каждого вида. Тогда n+4n+9n=14n Должно быть квадратом целого числа. Наименьшее *n*, при котором это возможно – 14. На рис. Приведен пример, как построить такой квадрат размер 14x14 (возможны и другие варианты расположения, главное, чтобы квадратиков было по 14).

3. Фирма проводила опрос сотрудников – какими социальными сетями они пользуются: ВКонтакте или Одноклассниками. Некоторые сотрудники ответили, что используют ВКонтакте, некоторые - Одноклассников, некоторые сказали, что используют обе социальные сети, а 40 сотрудников сказали, что не пользуются соц. сетями. Среди всех, кто использует соц. сети, ВКонтакте используют 75% , а 65% – обе сети. Доля тех сотрудников , которые используют Одноклассников , от общего числа всех сотрудников равна 5/6. Сколько всего сотрудников работает в фирме?

Ответ: 540

Решение: Поскольку среди пользователей соц. Сетей ВКонтакте используют 75%, получается, что только Одноклассников использует 25%. Кроме того, 65% используют обе сети, значит всего Одноклассниками пользуется 65+25=90% пользователей соц. Сетей. Эти 90% составляют 5/6 сотрудников фирмы, значит 100% составляет 10/9 * 5/6 = 50/54 от всех сотрудников. Поэтому те, кто не пользуются, составляют 1-50/54 = 4/54, причем их 40 человек. Следовательно, всего сотрудников 540.

4. В правильном 2017-угольнике провели все диагонали. Петя выбирает наугад какие-то N диагоналей. При каком наименьшем N среди выбранных диагоналей гарантированно найдутся две, имеющие одинаковую длину?

Ответ: 1008.

Решение: Выберем произвольную вершину и рассмотрим все диагонали, выходящие из нее. Их 2014 штук, причем по длине они разбиваются на 1007 пар. Очевидно, что повернув многоугольник, любую из его диагоналей можно совместить с одной из этих. Значит, существует всего 1007 разных размеров диагоналей. Значит, выбрав 1008, Петя гарантированно получит, по крайней мере, две одинаковые.

5. Сколькими способами можно разложить число 10000 на три натуральных множителя, ни один из которых не делится на 10? Считаем, что разложения, отличающиеся только порядком сомножителей, не различаются.

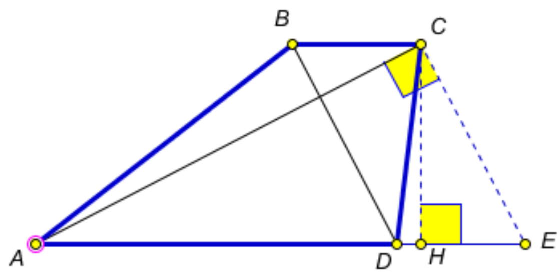
Ответ: 6.

Решение: В каждый из множителей должны входить только степени 2 и 5 (одновременно не могут, т.к. будет кратно 10). Может быть два множителя, равные степени двойки, тогда третий равен 625. Или наоборот – два множителя – степени пятерки, а третий равен 16. В каждом случае по 3 варианта.

6. В трапеции известны длины диагоналей – 6 и 8, а также длина средней линии – 5. Найдите высоту трапеции.

Ответ. 4,8.

Решение: Параллельно основаниям AD и BC переносим одну из диагональ BD на длину BC. Получаем треугольник *ACE* со сторонами 6,8,10, который, по обратной теореме Пифагора является прямоугольным. Записав площадь двумя способами: $S = \frac{1}{2} AC \times CE = \frac{1}{2} AE \times CH$, находим его высоту *CH*=4,8.



7. На сколько нулей оканчивается число

$$\left(1\underbrace{000\ldots00}_{2017\text{ нулей}}1\right)^{2017} - 1\ ?$$

Ответ 2018

Решение: Разложим на множители:

$$\left(1\underbrace{000\ldots00}_{2017\text{ нулей}}1\right)^{2017} - 1 = \left(1\underbrace{000\ldots00}_{2017\text{ нулей}}1 - 1\right) \times (1\underbrace{000\ldots00}_{2017\text{ нулей}}1^{2016} + 1\underbrace{000\ldots00}_{2017\text{ нулей}}1^{2015} + \ldots. + 1\underbrace{000\ldots00}_{2017\text{ нулей}}1 + 1)$$

. Первая скобка оканчивается на 2018 нулей, а вторая – не кратна 10.

8. Найдите *a*, такое, что сумма квадратов действительных корней уравнения $x^4 + ax^2 - 2017 = 0$ равна 4.

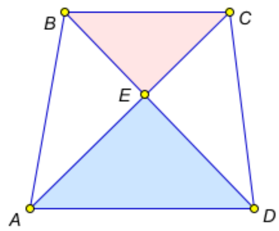
Ответ: 1006,5.

Решение: Сделаем замену $t = x^2$. Уравнение $t^2 + at - 2017 = 0$ имеет два корня, произведенеие которых равно -2017 по т. Виета. Следовательно, один из них отрицательный. Пусть $t_1 > 0$, Тогда корни исходного уравнения равны $\pm\sqrt{t_1}$. Сумма их квадратов равна $2t_1$, значит $t_1 = 2$. Подставляя в уравнение $t^2 + at - 2017 = 0$, получаем 4+2a-2017=0, откуда a=1006,5.

Вариант 2-а

1. Вовочка подошел к игровому автомату , на экране которого горело число 0. В правилах игры было написано: «*На экране показано число очков. Если кинуть монетку в 1 руб., то число очков увеличится на 1. Если кинуть монетку 2 руб., то число очков удвоится. Если набрать 50 очков, то автомат выдает приз. А если получилось число, большее 50, то все набранные очки сгорают.*»
   За какое минимальное количество рублей Вовочка сможет получить приз?
   Ответ: 11руб.
   Решение: Попробуем решить с конца – как за наименьшее количество рублей получить из 50 число 1, если можно только делить на 2 и вычитать 1. Получим: 50->25->24->12->6->3->2->1. Т.е. потребуется 4 двухрублевые и 3 рублевые монетки. Очевидно, что если использовать 3 двухрублевых и менее 5 рублевых(что соответствует умножению на 8), то не получить число, большее 40. Меньшим числом рублевых монет тоже не обойтись – можно показать перебором.
2. Петя придумывает пароль для своего смартфона. Пароль состоит из 4 десятичных цифр. Петя хочет, чтобы пароль не содержал цифру 7, при этом в пароле должны быть хотя бы две (или более) одинаковые цифры. Сколькими способами Петя может это сделать?
   Ответ 3537.
   Решение: Всего паролей, не содержащих цифры 7 будет $9^4 = 6561$. При этом 9х8х7х6=3024 состоят из разных цифр. Значит содержат одинаковые цифры 6561-3024=3537 паролей.
3. В компьютерном центре стоит 200 компьютеров, некоторые из них (попарно) соединены кабелями, всего использовано 345 кабелей. Будем называть «кластером» множество компьютеров, такое, что из любого компьютера этого множества сигнал по проводам (возможно, через промежуточные компьютеры) может добраться до всех остальных. В начале все компьютеры образовывали один кластер. Но однажды ночью злой хакер перерезал несколько кабелей, так, что образовалось 8 кластеров. Найдите наибольшее возможное число кабелей, которые были перерезаны.
   Ответ: 153.
   Решение: Попробуем представить себе задачу так: злой хакер перерезал все провода. Какое наименьшее количество проводов должен восстановить админ, чтобы получилось 8 кластеров? Очевидно, что добавляя провод админ может уменьшать число кластеров на единицу. Значит из 200 кластеров можно получить 8 если восстановить 192 провода. Следовательно хакер мог перерзать максимум 153 провода.

4. В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD||BC$ диагонали пересекаются в точке E. Известны площади $S(\Delta ADE) = 12$ и $S(\Delta BCE) = 3$. Найдите площадь трапеции.



Ответ:27

Решение: Треугольник ADE и CBE подобны, их площади относятся как квадрат коэффициента подобия. Следовательно, этот коэффициент равен 2. Значит, точка E делит диагонали в отношении 1:2. Поэтому площади треугольников ABE и CDE в два раза больше площади BCE и равны 6. Получаем S(ABCD)=12+3+6+6=27.

5. Написаны 2017 чисел. Известно, что сумма квадратов любых 7 из них равна 7 , сумма любых 11 из них положительна, а сумма всех 2017 чисел делится на 9. Найдите эти числа.

Ответ: Пять чисел равны -1, остальные равны 1.

Решения: Сумма квадратов любых 7 чисел равна 7. Отсюда следует, что все эти квадраты равны 1. Все эти числа равны +/-1. Сумма 11 положительна, значит количество -1 не превосходи 5. Если все будут равны 1, то сумма равна 2017 и на 9 не делится. Если поменять знак у одной единицы – сумма уменьшится на 2. Сделав так 5 раз получим 2007, которое делится на 9.

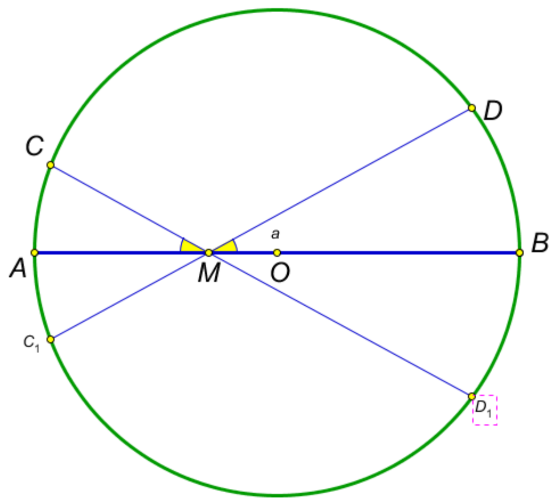
6. Найдите наименьшее натуральное число, оканчивающееся на цифру 2, которое удваивается, если переставить эту цифру в начало.

Ответ: 105263157894736842

Решение: Запишем число в виде ***…**2 и будем умножая на 2 постепенно восстанавливать «звездочки»:

***…**2 x 2 = ***…**4
***…*42 x 2 = ***…*84
***…*842 x 2 = ***…*684
***…*6842 x 2 = ***…*3684
***…*36842 x 2 = ***…*73684
***…*736842 x 2 = ***…*473684
***…*4736842 x 2 = ***…*9473684
…
105263157894736842x2=210526315789473684

7. На диаметре AB выбрана точка M. Точки C и D, лежащие на окружности по одну сторону от AB (см.рис.) выбраны так, что $\angle AMC = \angle BMD = 30°$. Найдите диаметр окружности, если известно, что



CD=12.

Ответ: $8\sqrt{3}$.

Решение: Сделаем симметрию относительно диаметра. Получим, что дуги CD и C_1D_1 равны, а их сумма равна 240^o, следовательно, каждая дуга равна 120^o. Можно считать, например, что CD это сторона вписанного правильного треугольника и найти радиус R = $4\sqrt{3}$.

8. Решите уравнение $x^7 \cdot \sqrt{2+x-x^2} + (2-x)^{11} \cdot \sqrt{3x-x^2} = 0$.

   Ответ: x=0, x=2

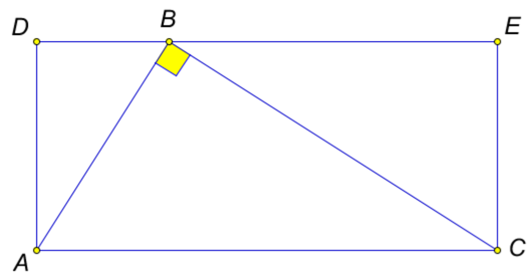
   Решение: ОДЗ этого уравнения – отрезок [0;2]. На этом отрезке оба слагаемых неотрицательны. Их сумма равна нулю только тогда, когда они оба равны нулю. Первое обращается в ноль при x = -1,0,2, а второе – при x=0,2,3. Совпадают только 0 и 2.

Вариант 2-b

1. Найдите наименьшее $n \geq 2017$, такое, что $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ не кратно 10.

   Ответ: 2020.

   Решение: Степени 1 всегда оканчиваются на 1. Последняя цифра степени 2 меняются с периодом 4: 2,4,8,6. Степени 3 –тоже 3,9,7,1. Степени 4 меняются с периодом 2: 4,6,4,6. Т.е. последняя цифра будет повторяться с периодом 4. Проверив для n=1,2,3 получаем, что последняя цифра 0, а для n=4 – 4. Следовательно, наименьшее N>2016 будет 2020.



2. Около прямоугольного треугольника *ABC* с катетами *AB*=5 и *BC* =6 описали прямоугольник *ADEC*, как показано на рисунке. Какова площадь *ADEC*?

   Ответ 30.

   Решение: Площадь прямоугольника в два раза больше площади треугольника.

3. Вася придумывает 4-значный пароль для кодового замка. Он не любит цифру 2, поэтому не использует ее. Кроме того он не любит когда две одинаковые цифры стоят рядом. А еще он хочет, чтобы первая цифра совпадала с последней. Сколько вариантов надо перебрать, чтобы гарантированно угадать Васин пароль.

   Ответ: 504

   Решение: Пароль должен иметь вид ABCA, где A,B,C – разные цифры (не равные 2). Их можно выбрать 9*8*7=504 способами.

Комментарий для проверяющих: Можно ставить половинный балл тем, кто считает, что первая цифра не равна нулю.

4. В Империи Вестероса было 1000 городов и 2017 дорог (каждая дорога соединяет какие-то два города). Из каждого города можно было проехать в каждый. Однажды злой волшебник заколдовал *N* дорог, и ездить по ним стало нельзя. Образовалось 7 королевств, так, что в каждом королевстве можно добраться из любого города в любой по дорогам, а из одного королевства в другое по дорогам добраться нельзя. При каком наибольшем *N* это возможно?

   Ответ 1024.

   Решение: Предположим, что злой волшебник заколдовал все 2017 дорог. Тогда получается 1000 королевств (каждое из одного города). Представим теперь, что добрый волшебник расколдовывает дороги так, чтобы получилось 7 королевств. Он должен расколдовать как минимум 993 дороги, т.к. каждая дорога уменьшает число королевств не более, чем на 1. Значит злой волшебник не мог заколдовать более 2017-993=1024 дорог.

   Для проверяющих: Можно засчитывать частичный балл за правильный ответ, полученный для какого-то частного случая – без общего обоснования.

5. Джеку Воробью нужно было разложить 150 пиастров по 10 кошелькам. После того, как он положил некоторое количество пиастров в первый кошелек, в каждый следующий он клал больше, чем в предыдущий. В результате оказалось, что количество пиастров в первом кошельке не меньше, чем половина количества пиастров в последнем. Сколько пиастров находится в 6-м кошельке?

   Ответ: 16

   Решение: Пусть в первом кошельке x пиастров. Тогда во втором не менее x+1, в третьем - не менее x+2. … в 10-м не менее x+9. Таки образом, с одной стороны $x + x + 1 + \cdots + x + 9 = 10x + 45 \leq 150$, Откуда $x \leq 10$. С другой стороны $x \geq (x + 9)/2$, откуда $x \geq\ 9$. Значит в первом лежит 9 или 10 пиастров. Но 9 не может быть, т.к . тогда в последнем не более 18 и сумма не получается 150.

   Значит в 1-м 10 , во втором – не менее 11, в 3 – не менее 12, в 4 – не менее 13, в 5 – не менее 14 и в 6-м –не менее 15. Но при 15 сумма получается менее 150. Значит 16. А больше быть не может, т.к. тогда в последнем кошельке будет 21.

   Для проверяющих: Можно ставить частичный балл за правильный пример раскладки (подбор) без доказательства единственности.

   Найдите наименьшее натуральное *N*, такое, что десятичная запись числа $N \times 999$ состоит из одних семерок (знак "×" означает умножение чисел).

   Ответ 778556334111889667445223

   Решение: $N \times 999 = 77 \dots 7$, тогда N кратно 7, обозначим n=N/7. Получим $999n = 1000n - n = 11 \dots 1$, значит 1000n -111…1 = n. Запишем в виде вычитания столбиком и будем повторять найденные цифры N со сдвигом на 3 влево

   *******000

   -

1111111111

   ******889

****889000
-
1111111111

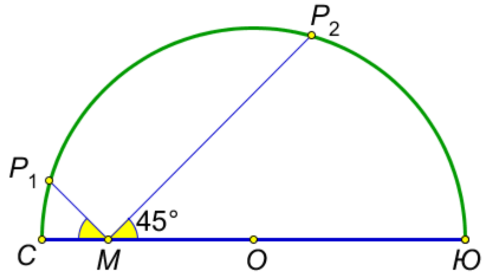
   ***777889

777889000
-
111111111

6667778889

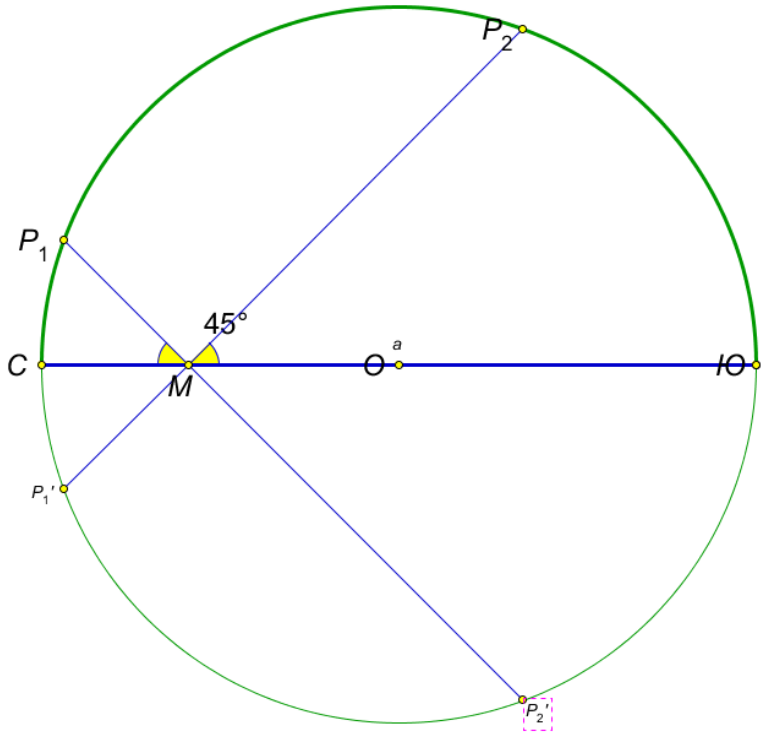
Заметим, что далее цифры повторяются по 3, получаем
n=111 222 333 444 555 666 777 889.
Значит N = 7n = 778556334111889667445223.
Для проверяющих: альтернативный ход решения – взять число 111…1 и начать его делить в столбик на 999, пока не разделится нацело. Думаю, можно не снижать балл, если в самом конце число n неправильно умножили на 7.

6. Марк Уотни испытывает на прочность новый купол, предназначенный для экспедиции на Марс. Купол выполнен в форме полусферы радиуса 20м. Марк поворачивается на север и стреляет под углом 45° к земле, потом поворачивается на юг и тоже стреляет под углом 45° (см. рис). Какие значения может принимать $|P_1P_2|$ - расстояние между точками попадания?



Ответ $20\sqrt{2}$
Решение: Сделав симметрию относительно диаметра, получим, что дуги P_1P_2 и $P_1'P_2'$ равны и их сумма 180°. Следовательно, каждая составляет 90° и центральный

угол, опирающийся на нее – прямой.



7. Решить уравнение $\sqrt{x}(x^2-3x-4)^3+\sqrt{4-x}(x^2-8x)^5=0.$
Ответ: x=0; x=4.
Решение ОДЗ данного уравнения – отрезок [0;4]. На этом отрезке квадратные трехчлены x^2-3x-4 и x^2-8x не превосходят 0. Сумма двух неположительных слагаемых равна 0 только если каждое из них равно 0. Первое равно 0 при x=-1,0,4. Второе равно 0 при x=0,4,8. Совпадают только 0 и 4.

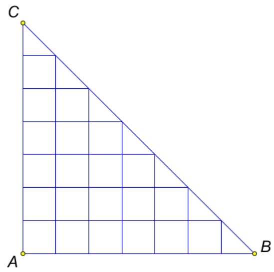
Вариант 1-а

1. Часы Безумного Шляпника спешат на 15 минут в час, а часы Мартовского Зайца отстают на 10 минут в час. Однажды они поставили свои часы по часам Сони (которые остановились и всегда показывают 12-00) и договорились собраться в 5 часов вечера на традиционный файв-о-клок. Сколько времени Безумный Шляпник будет ждать Мартовского Зайца, если каждый приходит ровно в 17-00 по своим часам?
Ответ: 2 часа.
Решение: Часы Безумного шляпника ищут со скоростью, составляющей 5/4 от обычной, поэтому 5 часов они пройдут за 4 часа обычного времени. Аналогично, часы Мартовского Зайца идут со скоростью 5/6 от обычной, поэтому 5 часов они пройдут за 6 часов.
2. На международный чемпионат по игре в StarCraft съехалось 100 участников. Игра идет на выбывание, т.е. в каждом матче участвует два игрока, проигравший выбывает из участия в чемпионате, а выигравший – остается. Найдите наибольшее возможное количество участников, которые выиграли ровно две партии?
Ответ:49
Решение: Каждый участник (кроме победителя) проиграл кому-то одну партию. Таких 99,

значит выиграть 2 партии не могло более 49 участников (им кто-то должен проиграть 2 партии).

Покажем, что их могло быть 49. Пусть №3 выиграл у №1 и №2, №5 – у №3 и №4,… №99 – у №97 и №98, а №100 выиграл у №99. Тогда все участники с нечетными номерами (кроме первого) выиграли ровно по 2 партии.

3. Назовем число «замечательным», если оно имеет ровно 4 различных натуральных делителя, причем среди них найдутся два, такие, что ни один не кратен другому. Сколько существует «замечательных» двузначных чисел?



Ответ 36.

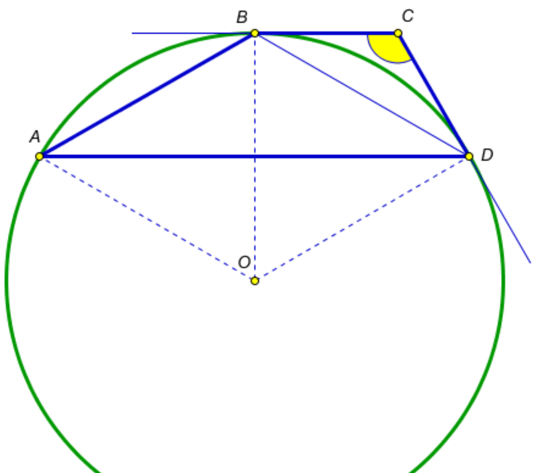
Решение: Такие числа обязательно имеют вид $p_1 \cdot p_2$, где p_1, p_2 - простые числа. Заметим, что меньшее из этих простых чисел не может быть больше 7, т.к. тогда произведение будет не менее 121. Достаточно перебрать $p_1 = 2,3,5,7$. Для 2 получаем второй множитель: 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, или 47 - 14 вариантов, для 3 получаем : 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 – 10 вариантов, для 5 - : 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, - 7 вариантов и для 7: 3, 5, 7, 11, 13, - 5 вариантов. Всего 14+10+7+5 = 36 вариантов.

4. На клетчатой бумаге нарисовали прямоугольный треугольник с катетами, равными 7 клеткам (см.рис.). Потом обвели все линии сетки, находящиеся внутри треугольника. Какое наибольшее количество треугольников можно найти на этом рисунке?

Ответ: 28 треугольников

Решение: Одна из сторон треугольника должна идти под наклоном, т.е. лежать на отрезке BC. Если зафиксировать какой-то диагональный отрезок, то оставшаяся вершина определяется однозначно. Т.е. надо выбрать две точки из 8, это можно сделать 7x8\2=28 способами.

5. В трапеции *ABCD* с основаниями *AD* и *BC* известен угол *BCD*, равный 120°. В этот угол вписана окружность радиуса 1, проходящая через точки *A,B* и *D*. Найдите площадь треугольника *ABD*.



Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Решение: Треугольник BCD – равнобедренный, углы при основании (180-120)/2=30°. Следовательно, $\angle BDA = \angle CBD = 30°$. С другой стороны $\angle BOD = 360 - 90 - 90 - \angle BCD = 60°$. Тогда угол $\angle BAD = 30°$ как вписанный. Стороны AB и BD равны радиусу окружности, поэтому площадь равна $\frac{1}{2} AB \times BD \times \sin \angle B = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

6. Найдите все такие трёхзначные числа $\overline{\text{ПВГ}}$, состоящие из различных цифр *П*, *В* и *Г*, для которых выполняется равенство $\overline{\text{ПВГ}} = (\text{П} + \text{В} + \text{Г}) \times (\text{П} + \text{В} + \text{Г} + 1)$.

Ответ:156.

Решение: Заметим, что П+В+Г≥ 3 и ≤ 24 (т.к. цифры разные). Кроме того числа $\overline{\text{ПВГ}}$ и $(\text{П} + \text{В} + \text{Г})$ должны давать одинаковые остатки при делении на 9. Это возможно только тогда, когда П+В+Г кратно 3. Заметим, что П+В+Г=9 – не подходит, т.к. $(\text{П} + \text{В} + \text{Г})\times(\text{П} + \text{В} + \text{Г} + 1) = 90$ –двузначное. Перебирая 12, 15,18,21, 24, получаем $\overline{\text{ПВГ}} = 156 = 12\times 13$.

7. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назовем точку «эквидистантной», если найдутся две вершины куба, для которых эта точка является серединой отрезка. Сколько «эквидистантных» точек в кубе?
   Ответ: 19.
   Решение: Середины 12 ребер, центры 6 граней и центр самого куба.

8. Пусть x_1, x_2 – корни уравнения $x^2 - x - 3 = 0$. Найдите $\left(x_1^5 - 20\right)\cdot(3x_2^4 - 2x_2 - 35)$.
   Ответ: -1063.
   Решение: Если x - один из корней уравнения, то x^2=x+3. Возводя в квадрат, получим x^4= x^2+6x+9=7x+12. Умножив на x, получим x^5=7x^2+12x=19x+21. Подставляя вместо x корни уравнения, получим: $\left(x_1^5 - 20\right)\cdot(3x_2^4 - 2x_2 - 35) = (19x_! + 21 - 20)\cdot(21x_2 + 36 - 2x_2 - 35) = (19x_1 + 1)(19x_2 + 1) = 361x_1x_2 + 19(x_1 + x_2) + 1$. По теореме Виета $x_1x_2 = -3, x_1 + x_2 = 1$. Подставив, получим 361*(-3) +19 + 1 = -1063.

Вариант 1-b

1. Петины часы спешат на 5 минут в час, а Машины – отстают на 8 минут в час. В 12-00 они поставили свои часы по школьным часам (которые идут точно) и договорились в полседьмого пойти вместе на каток. Сколько времени Петя будет ждать Машу, если каждый приходит на каток ровно в 18-30 по своим часам?
   Ответ: 1,5 часа.
   Решение: Петины часы идут со скоростью, составляющей 13/12 от обычной, поэтому 6,5 часов они проходят за 6 часов реального времени. Машины часы идут со скоростью 13/15 от обычной, поэтому 6,5 часов они пройдут за 7,5 часов реального времени.
2. На международный чемпионат по настольному теннису съехалось 200 участников. Игра идет на выбывание, т.е. в каждом матче участвует два игрока, проигравший выбывает из участия в чемпионате, а выигравший – остается. Найдите наибольшее возможное количество участников, которые выиграли не менее трех партий.
   Ответ:66.
   Решение: Каждый участник (кроме победителя) проиграл кому-то одну партию. Таких 199, значит выиграть 3 партии не могло более 66 участников (им кто-то должен проиграть 3 партии).
   Покажем, что их могло быть 66. Пусть №4 выиграл у №1,2,3; №7 – у №4,5,6,… №199 – у №196,197,198, а №200 выиграл у №199. Тогда все участники с номерами дающими остаток 1 при делении на 3 (кроме первого) выиграли ровно по 3 партии.
3. Назовем число «изумительным», если оно имеет ровно 3 различных нечетных натуральных делителя (и произвольное количество четных). Сколько существует «изумительных» двузначных чисел?
   Ответ: 7.
   Решение: Такие числа имеют вид $2^k\times p^2$, Где p – нечетное простое число. Очевидно, p не превосходит 7, т.к. результат должен быть двузначным. Если p = 3, то k=0,1,2,3; Если p =5, то k=0,1; если p=7, то к=0. Всего 7 вариантов.

4. На клетчатой бумаге нарисовали ступенчатый прямоугольный треугольник с катетами, равными 6 клеткам (см.рис.). Потом обвели все линии сетки, находящиеся внутри треугольника. Какое наибольшее количество прямоугольников можно найти на этом рисунке?

Ответ: 126

Решение: Для каждой клеточки найдем количество прямоугольников, в которых эта клеточка является правым верхним углом. Это несложно сделать, можно просто перемножить номер клетки по горизонтали и по вертикали (если начинать с левого нижнего угла и нумеровать с единицы).

6						
5	10					
4	8	12				
3	6	9	12			
2	4	6	8	10		
1	2	3	4	5	6	

Просуммировав числа по столбцам: 1+…+6+2(1+…5) + 3(1+…4) + 4(1+..+3)+5(1+2)+6= 21 + 30+30+24+15+6 = 126.

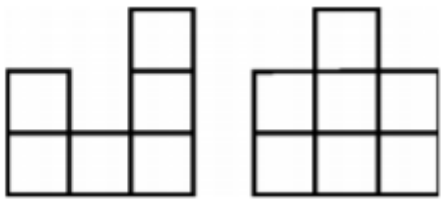
5. В трапеции *KLMN* с основаниями *KN* и *LN* известен угол *LMN*, равный 60^o. Около треугольника *KLN* описана окружность, касающаяся прямых *LM* и *MN.* Найдите радиус окружности, если известно, что периметр треугольника *KLN* равен 12.

Ответ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Решение: Треугольник LMN – Равносторонний, дуга LN составляет 60^o, поэтому треугольник KLN – Тоже равносторонний. Его сторона равна 4, поэтому радиус описанной окружности равен $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

6. Найдите все такие трёхзначные числа $\overline{МГУ}$, состоящие из различных цифр *М*, *Г* и *У*, для которых выполняется равенство $\overline{МГУ} = (М + Г + У)\times(М + Г + У - 2)$.

Ответ: 195



Решение: Заметим, что М+Г+У ≤ 24 (т.к. цифры разные). Кроме того числа $\overline{МГУ}$ и $(М + Г + У)$ должны давать одинаковые остатки при делении на 9. Это возможно только тогда, когда $М + Г + У$ кратно 3. Заметим, что $М + Г + У \leq 9$ – не подходит, т.к. $(М + Г + У)\times(М + Г + У - 2)$ –двузначное. Перебирая 12, 15,18,21, 24, получаем $\overline{МГУ} = 195 = 15\times13$.

7. На уроке рисования учитель сложил из нескольких одинаковых кубиков фигуру, а Петров и Васечкин нарисовали ее с двух различных точек зрения (см. рис.). Из скольких кубиков могла состоять эта фигура? (В ответе укажите произведение наибольшего и наименьшего возможного значения).

Ответ 16х8=128.

Решение: Несложно построить подходящцю фигуру из 8 кубиков. ИЗ 7 нельзя, т.к. средний кубик на левом чертеже не может соответствовать ни одному кубику на правом. А наибольшее число кубиков – «фасад « из 7 кубиков (правая фигура), потом полоска из 3 кубиков и прямоугольник из 6 кубиков сзади.

8. Пусть x_1, x_2 – корни уравнения $x^2 - x - 4 = 0$. Найдите $\left(x_1^5 - 20x_1\right) \cdot (x_2^4 + 16)$.
Ответ 76
Решение: Если x - один из корней уравнения, то x^2=x+4. Возводя в квадрат, получим x^4= x^2+8x+16=9x+20. Умножив на x, получим x^5=9x^2+20x=29x+36. Подставляя вместо x корни уравнения, получим:$\left(x_1^5 - 20x_1\right) \cdot (x_2^4 + 16). = (29x_1 + 36 - 20x_1) \cdot (9x_2 + 16) = (9x_1 + 16)(9x_2 + 16) = 81x_1x_2 + 144(x_1 + x_2) + 256$. По теореме Виета $x_1x_2 = -4, x_1 + x_2 = 1$. Подставив, получим81*(-4) +144 + 256 =76

Все задачи оценивались по 15 баллов.