Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников

«Покори Воробьевы горы»

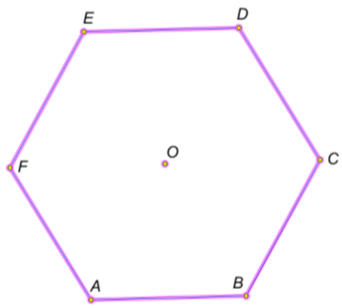
по математике

Задания заочного этапа 2016/2017 учебного года для 5–6 класса

1. Капитан Джек-Воробей нашел пещеру с пиратским кладом. В ней стоит 6 сундуков, причем клад есть только в одном из них, а в остальных сундуках живут ядовитые змеи, готовые наброситься на каждого, кто потревожит их покой.
   На первом сундуке написано «Клад в третьем сундуке».
   На втором «Клад во мне или в первом сундуке».
   На третьем «Во мне клада нет».
   На четвертом «Клад лежит в сундуке с нечетным номером».
   На пятом «Во втором и шестом сундуке клада нет».
   На шестом «В четвертом сундуке клада нет».
   Помогите Джеку найти клад, если известно, что ровно половина надписей – истинна. В ответе укажите номер сундука с кладом.
   ОТВЕТ: 2.
   Решение*:* Составим таблицу размера 6х6. В i-й строке и j-м столбце поставим крестик, если i-е утверждение верно, когда клад лежит в j-м сундуке:

	1	2	3	4	5	6
1			X			
2	X	X				
3	X	X		X	X	X
4	X		X		X	
5	X		X	X	X	
6	X	X	X		X	X

   По условию задачи подходит тот столбец, в котором ровно 3 крестика – т.е. второй.
2. Найдите наименьшее натуральное число, сумма цифр которого равна 2017. В ответе укажите первую слева цифру, умноженную на количество цифр.
   ОТВЕТ: 225.
   Решение: Чтобы число было наименьшим, количество цифр в нем должно быть как можно меньше, т.е. сами цифры надо брать как можно больше. Разделим 2017 на 9 с остатком: 2017 = 224*9+1. Значит наименьшим будет число 199…9 (224 девяток).
3. *ABCDEF* – правильный шестиугольник, точка O – его центр. Сколько различных равнобедренных треугольников с вершинами в указанных семи точках можно построить? Треугольники, отличающиеся только порядком вершин, считаются за



один треугольник (например, AOB и BOA).

ОТВЕТ: 20.

Решение: Рассмотрим сначала треугольники, не содержащие точки O. Это два правильных треугольника и 6 треугольников с углом 120°. С вершиной O есть 6 правильных треугольников и 6 треугольников с углом 120°.

4. Сумма 1928 натуральных чисел равна 2016, а произведение - 1001. Найдите эти числа. В ответе укажите сумму наибольшего и наименьшего из этих чисел.

ОТВЕТ: 78.

Решение: 1001=7*11*13, следовательно возможны варианты:

а) 7, 11, 13 и 1925 единиц

б) два числа(7 и 143, или 11 и 91 или 13 и 77) и 1926 единиц

в) 1001 и 1927 единиц.

а) и в) не подходят, так как в сумме указанные числа не дают 2016, а в случае б) сумма двух чисел должна быть 90, т.е. это 13 и 77.

5. Коля купил 14 карандашей и 3 ластика за 107 рублей. Цена карандаша отличается от цены ластика не более, чем на 5 рублей, причем оба предмета стоят целое число рублей. Петя купил 1 ластик и 1 карандаш, сколько он заплатил?

ОТВЕТ: 10.

Решение: Обозначим x – цена карандаша, y – ластика. Тогда 14x+3y=107. Заметим, что 107-14x = 3(36 – 5x) + x – 1 должно быть кратно 3. Это возможно при x = 1, 4, 7. Ввиду того, что цена карандаша отличается от цены ластика не более, чем на 5 рублей, подходит только x=7, y=3.

6. На числовой прямой отмечены точки с координатами 0, 1, 2, 3, 5, 8, 2016. Рассматривается множество длин отрезков с концами в этих точках. Сколько элементов оно содержит?

ОТВЕТ: 14.

Решение: Заметим, что точки 0, 1, 2, 3, 5, 8 образуют отрезки всех длин от 1 до 8. Кроме того, 2016 образует отрезки различных длин с каждой из этих точек.