Задания заключительного этапа – младшие классы

5-6 классы

Вариант 3-а

1. В деревне Большие Васюки есть набережная длиной 50 метров, проходящая вдоль реки. Катер длиной 10 м. проходит мимо нее за 5 секунд, если плывет по течению и за 4 секунды – если против. За сколько секунд бумажный кораблик доплывет от одного конца набережной до другого?

   Ответ: $33\frac{1}{3}$ сек.

   Решение: Скорость катера по течению равна 15м/с, а против 12м/с, следовательно, скорость течения равна 1.5 м/с, поэтому кораблик проплывет мимо нее за 50/1.5 $=33\frac{1}{3}$ сек.

   Комментарий для проверяющих: В условии были перепутаны время по и против течению.
2. Найдите две положительные несократимые дроби со знаменателями, не превосходящими 100, сумма которых равна 86/111.

   Ответ: 2/3+4/37.

   Решение: 111=37*3, т.е. одна дробь должны быть со знаменателем 37, а другая – со знаменателем 3. Очевидно, что числитель второй дроби может быть 1 или 2. 1/3 не подходит, а для 2/3 получаем 4/37.
3. Найдите наименьшее n>2016, такое, что $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ не кратно 10.

   Ответ: 2020.

   Решение: Степени 1 всегда оканчиваются на 1. Последняя цифра степени 2 меняются с периодом 4: 2,4,8,6. Степени 3 –тоже 3,9,7,1. Степени 4 меняются с периодом 2: 4,6,4,6. Т.е. последняя цифра будет повторяться с периодом 4. Проверив для n=1,2,3 получаем, что последняя цифра 0, а для n=4 – 4. Следовательно, наименьшее N>2016 будет 2020.
4. У Маши есть 2 кг конфет «Ласточка», 3 кг конфет «Трюфель», 4 кг конфет «Птичье молоко» и 5 кг конфет «Цитрон». Какое наибольшее количество новогодних подарков она может составить, если каждый подарок должен содержать 3 различных типа конфет, по 100 грамм каждого?

   Ответ: 45

   Решение: Даже если класть «Цитрон» во все подарки, то у Маши останется 2+3+4 = 9кг конфет, причем в каждый подарок она должна положить не менее 200г (а если Цитрон класть не во все – то более 200г.). Значит подарков не более 45. А 45 подарков можно составить, если сделать 5 подарков вида Ласточка+Трюфель+Цитрон, 15 подарков типа Ласточка+Птичье молоко + Цитрон и

25 подарков типа Трюфель+Птичье молоко + Цитрон.

Комментарий для проверяющих: Тут можно ставить половинный балл за правильный подбор без доказательства того, что он оптимален.

5. Вася придумывает 4-значный пароль для кодового замка. Он не любит цифру 2, поэтому не использует ее. Кроме того он не любит когда две одинаковые цифры стоят рядом. А еще он хочет, чтобы первая цифра совпадала с последней. Сколько вариантов надо перебрать, чтобы гарантированно угадать Васин пароль.

   Ответ: 504

   Решение: Пароль должен иметь вид ABCA, где A,B,C – разные цифры (не равные 2). Их можно выбрать 9*8*7=504 способами.

   Комментарий для проверяющих: Можно ставить половинный балл тем, кто считает, что первая цифра не равна нулю.

6. В Империи Вестероса было 1000 городов и 2017 дорог (каждая дорога соединяет какие-то два города). Из каждого города можно было проехать в каждый. Однажды злой волшебник заколдовал *N* дорог, и ездить по ним стало нельзя. Образовалось 7 королевств, так, что в каждом королевстве можно добраться из любого города в любой по дорогам, а из одного королевства в другое по дорогам добраться нельзя. При каком наибольшем *N* это возможно?

   Ответ 1024.

   Решение: Предположим, что злой волшебник заколдовал все 2017 дорог. Тогда получается 1000 королевств (каждое из одного города). Представим теперь, что добрый волшебник расколдовывает дороги так, чтобы получилось 7 королевств. Он должен расколдовать как минимум 993 дороги, т.к. каждая дорога уменьшает число королевств не более, чем на 1. Значит злой волшебник не мог заколдовать более 2017-993=1024 дорог.

   Для проверяющих: Можно засчитывать частичный балл за правильный ответ, полученный для какого-то частного случая – без общего обоснования.

Вариант 3-b

1. Свежие яблоки содержат 90% воды, а сушеные – 12 % воды. Лена считает, что если компот содержит более 95% воды, то он невкусный. Какое наибольшее количество вкусного компота она может сварить из 4 кг свежих и 1 кг сушеных яблок (и произвольного количество воды)? Испарение воды в процессе варки считать незначительным.

   Ответ: 25,6 кг.

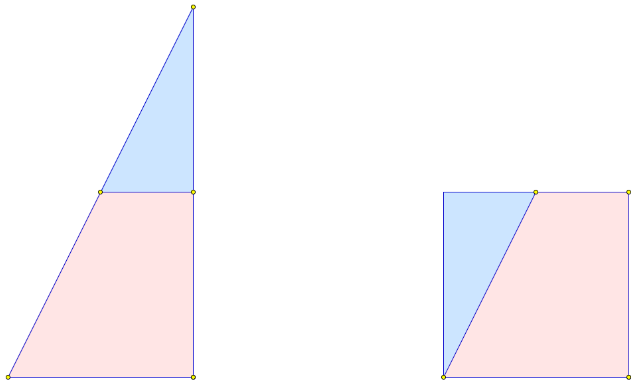
   Решение – аналогично варианту v3a.

2. Даны шесть чисел, среднее арифметическое которых равно некоторому числу A. Петров посчитал среднее арифметическое первых четырех чисел – оно оказалось равно A+10. Васечкин посчитал среднее арифметическое последних четырех чисел – оно равно A - 7. В какую сторону и на сколько отличается от A среднее арифметическое первого, второго, пятого и шестого из этих чисел?

Ответ: на 3 меньше.

Решение – аналогично варианту v3a.

3. Прямоугольный треугольник разрезали по прямой на две части и сложили из них квадрат(см. рис). Чему равен меньший катет, если больший равен 10?



Ответ 5.

Решение: Короткий катет равен стороне квадрата, а длинный – удвоенной стороне квадарта.

4. Пиратская шхуна взяла торговое судно на абордаж. Десять пиратов не участвовали в бою, а остальные потеряли в бою либо руку, либо ногу, либо и руку и ногу одновременно. 54% участников боя потеряли руку, а 34% - руку и ногу. Известно, что 2/3 всех пиратов, бывших на шхуне потеряли ногу. Сколько пиратов находилось на шхуне?

Ответ: 60 пиратов.

Решение – аналогично варианту v3a.

5. В правильном 1000-угольнике провели все диагонали. Какое наибольшее количество диагоналей можно выбрать так, чтобы среди любых трех из выбранных диагоналей по крайней мере две имели одинаковую длину?

Ответ: 2000

Решение: Для того, чтобы выполнялось условие задачи, необходимо, чтобы длины диагоналей принимали не более двух различынх значений. Диагоналей, соединяющих диаметрально противоположные вершины 500. Любую другую диагональ можно поворотом наложить на диагональ соответствующей длины, т.е. их по 1000 штук. значит можно выбрать 2000 с соблюдением условия.

6. Сколькими способами можно разложить число 1024 на три натуральных множителя, так, чтобы первый множитель был кратен второму, а второй – третьему?

Ответ: 14

Решение: Заметим, что множители имеют вид $2^a \times 2^b \times 2^c$, где a+b+c=10 и $a \geq b \geq c$. Очевидно, что с меньше 4,т.к. сумма была бы больше 10. Рассмотрим случаи:

c=0) Тодга b=0,…,5, a=10-b – 6 вариантов

c=1) Тогда b = 1,..,4, a=9-b – 4 вар.

c=2) b=2,3, 4, a=8-b – 3 вар.

c=3) b=3, a=4 – 1 вар.

итого 6+4+3+1 = 14 вариантов.

Вариант 2-а

1. В деревне Большие Васюки есть набережная длиной 50 метров, проходящая вдоль реки. Катер длиной 10 м. проходит мимо нее за 5 секунд, если плывет по течению и за 4 секунды – если против. За сколько секунд бумажный кораблик доплывет от одного конца набережной до другого?
   Ответ: $33\frac{1}{3}$ сек.
   Решение: Скорость катера по течению равна 15м/с, а против 12м/с, следовательно, скорость течения равна 1.5 м/с, поэтому кораблик проплывет мимо нее за 50/1.5 $=33\frac{1}{3}$ сек.
   Комментарий для проверяющих: В условии были перепутаны время по и против течению.
2. Найдите две положительные несократимые дроби со знаменателями, не превосходящими 100, сумма которых равна 86/111.
   Ответ: 2/3+4/37.
   Решение: 111=37*3, т.е. одна дробь должны быть со знаменателем 37, а другая – со знаменателем 3. Очевидно, что числитель второй дроби может быть 1 или 2. 1/3 не подходит, а для 2/3 получаем 4/37.
3. Найдите наименьшее n>2016, такое, что $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ не кратно 10.
   Ответ: 2020.
   Решение: Степени 1 всегда оканчиваются на 1. Последняя цифра степени 2 меняются с периодом 4: 2,4,8,6. Степени 3 –тоже 3,9,7,1. Степени 4 меняются с периодом 2: 4,6,4,6. Т.е. последняя цифра будет повторяться с периодом 4. Проверив для n=1,2,3 получаем, что последняя цифра 0, а для n=4 – 4. Следовательно, наименьшее N>2016 будет 2020.
4. У Маши есть 2 кг конфет «Ласточка», 3 кг конфет «Трюфель», 4 кг конфет «Птичье молоко» и 5 кг конфет «Цитрон». Какое наибольшее количество новогодних подарков она может составить, если каждый подарок должен содержать 3 различных типа конфет, по 100 грамм каждого?
   Ответ: 45
   Решение: Даже если класть «Цитрон» во все подарки, то у Маши останется 2+3+4 = 9кг конфет, причем в каждый подарок она должна положить не менее 200г (а если Цитрон класть не во все – то более 200г.). Значит подарков не более 45. А 45 подарков можно составить, если сделать 5 подарков вида Ласточка+Трюфель+Цитрон, 15 подарков типа Ласточка+Птичье молоко + Цитрон и 25 подарков типа Трюфель+Птичье молоко + Цитрон.

Комментарий для проверяющих: Тут можно ставить половинный балл за правильный подбор без доказательства того, что он оптимален.

5. Вася придумывает 4-значный пароль для кодового замка. Он не любит цифру 2, поэтому не использует ее. Кроме того он не любит когда две одинаковые цифры стоят рядом. А еще он хочет, чтобы первая цифра совпадала с последней. Сколько вариантов надо перебрать, чтобы гарантированно угадать Васин пароль.

   Ответ: 504

   Решение: Пароль должен иметь вид ABCA, где A,B,C – разные цифры (не равные 2). Их можно выбрать 9*8*7=504 способами.

   Комментарий для проверяющих: Можно ставить половинный балл тем, кто считает, что первая цифра не равна нулю.

6. В Империи Вестероса было 1000 городов и 2017 дорог (каждая дорога соединяет какие-то два города). Из каждого города можно было проехать в каждый. Однажды злой волшебник заколдовал *N* дорог, и ездить по ним стало нельзя. Образовалось 7 королевств, так, что в каждом королевстве можно добраться из любого города в любой по дорогам, а из одного королевства в другое по дорогам добраться нельзя. При каком наибольшем *N* это возможно?

   Ответ 1024.

   Решение: Предположим, что злой волшебник заколдовал все 2017 дорог. Тогда получается 1000 королевств (каждое из одного города). Представим теперь, что добрый волшебник расколдовывает дороги так, чтобы получилось 7 королевств. Он должен расколдовать как минимум 993 дороги, т.к. каждая дорога уменьшает число королевств не более, чем на 1. Значит злой волшебник не мог заколдовать более 2017-993=1024 дорог.

   Для проверяющих: Можно засчитывать частичный балл за правильный ответ, полученный для какого-то частного случая – без общего обоснования.

Вариант 2-b

1. Если открыть кран с холодной водой, то ванна наполнится за 10 мин., если открыть кран с горячей, то за 15. Если вытащить пробку, то ванна полностью выливается за 12 мин. Сколько времени будет наполняться ванна, если открыть оба крана и вытащить пробку?

   Ответ: 12 мин.

   Решение: Возьмем одну ванну за единицу измерения объема. Вода из крана с холодной водой течет со скоростью 1/10 ванны в минуту, а из крана с горячей – со скоростью 1/15 ванны в минуту. Из сливного отверстия вода вытекает со скоростью 1/12 ванны в минуту. Значит общая скорость будет 1/10+1/15-1/12 = 1/12, следовательно, ванна заполнится за 12 мин.

2. Сколько натуральных чисел от 1 до 2017 имеют ровно три различных натуральных делителя?

   Ответ: 14.

   Решение: Только квадраты простых чисел имеют ровно три делителя. Заметим, что $47^2 > 2017$, поэтому достаточно рассмотреть квадраты простых чисел от 2 до 43. Их 14 штук.

3. Вовочка подошел к игровому автомату , на экране которого горело число 0. В правилах игры было написано: «*На экране показано число очков. Если кинуть монетку в 1 руб., то число очков увеличится на 1. Если кинуть монетку 2 руб., то число очков удвоится. Если набрать 50 очков, то автомат выдает приз. А если получилось число, большее 50, то все набранные очки сгорают.*»
   За какое минимальное количество рублей Вовочка сможет получить приз?
   Ответ: 11руб.
   Решение: Попробуем решить с конца – как за наименьшее количество рублей получить из 50 число 1, если можно только делить на 2 и вычитать 1. Получим: 50->25->24->12->6->3->2->1. Т.е. потребуется 4 двухрублевые и 3 рублевые монетки. Очевидно, что если использовать 3 двухрублевых и менее 5 рублевых(что соответствует умножению на 8), то не получить число, большее 40. Меньшим числом рублевых монет тоже не обойтись – можно показать перебором.

4. Петя придумывает пароль для своего смартфона. Пароль состоит из 4 десятичных цифр. Петя хочет, чтобы пароль не содержал цифру 7, при этом в пароле должны быть хотя бы две (или более) одинаковые цифры. Сколькими способами Петя может это сделать?

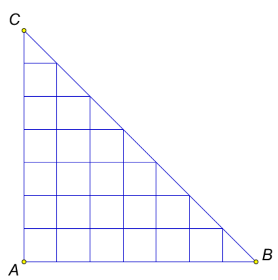
   Ответ 3537.

   Решение: Всего паролей, не содержащих цифры 7 будет $9^4 = 6561$. При этом 9x8x7x6=3024 состоят из разных цифр. Значит содержат одинаковые цифры 6561-3024=3537 паролей.

5. В компьютерном центре стоит 200 компьютеров, некоторые из них (попарно) соединены кабелями, всего использовано 345 кабелей. Будем называть «кластером» множество компьютеров, такое, что из любого компьютера этого множества сигнал по проводам может добраться до всех остальных. В начале все компьютеры образовывали один кластер. Но однажды ночью злой хакер перерезал несколько кабелей, так, что образовалось 8 кластеров. Найдите наибольшее возможное число кабелей, которые были перерезаны.
   Ответ: 153.
   Решение: Попробуем представить себе задачу так: злой хакер перерезал все провода. Какое наименьшее количество проводов должен восстановить админ, чтобы получилось 8 кластеров? Очевидно, что добавляя провод админ может уменьшать число кластеров на единицу. Значит из 200 кластеров можно получить 8

если восстановить 192 провода. Следовательно хакер мог перерзать максимум 153 провода.

Вариант 1-а

1. Часы Безумного Шляпника спешат на 15 минут в час, а часы Мартовского Зайца отстают на 10 минут в час. Однажды они поставили свои часы по часам Сони (которые остановились и всегда показывают 12-00) и договорились собраться в 5 часов вечера на традиционный файв-о-клок. Сколько времени Безумный Шляпник будет ждать Мартовского Зайца, если каждый приходит ровно в 17-00 по своим часам?
   Ответ: 2 часа.
   Решение: Часы Безумного шляпника ищут со скоростью в 5/4 от обычной, поэтому 5 часов они пройдут за 4 часа обычного времени.Аналогично, часы Мартовского Зайца идут со скоростью 5/6 от обычной, поэтому 5 часов они пройдут за 6 часов.
2. Сколько натуральных чисел от 1 до 2017 имеют ровно три различных натуральных делителя?
   Ответ: 14.
   Решение: Только квадраты простых чисел имеют ровно три делителя. Заметим, что $47^2 > 2017$, поэтому достаточно рассмотреть квадраты простых чисел от 2 до 43. Их 14 штук.
3. На международный чемпионат по игре в StarCraft съехалось 100 участников. Игра идет на выбывание, т.е. в каждом матче участвует два игрока, проигравший выбывает из участия в чемпионате, а выигравший – остается. Найдите наибольшее возможное количество участников, которые выиграли ровно две партии?
   Ответ:49
   Решение: Каждый участник (кроме победителя) проиграл кому-то одну партию. Таких 99, значит выиграть 2 партии не могло более 49 участников (им кто-то должен проиграть 2 партии).
   Покажем, что их могло быть 49. Пусть №3 выиграл у №1 и №2, №5 – у №3 и №4,… №99 – у №97 и №98, а №100 выиграл у №99. Тогда все участники с нечетными номерами (кроме первого) выиграли ровно по 2 партии.
4. Робот движется по прямолинейным участкам, при этом совершая повороты через каждую минуту на 90 градусов направо или налево (временем на поворот пренебречь). За минуту робот проходит 10 метров. На каком минимальном расстоянии от начального положения он может оказаться через 9 мин. после начала движения, если в течение первой минуты робот не поворачивал?
   Ответ: 10м
   Решение: Можно рассмотреть координатную сетку с узлами идущими через 10м. Очевидно, робот проходит по узлам этой сетки. В исходную позицию за 9 мин. Он вернуться не может. А на расстоянии 10 м может оказаться – легко построить пример.
5. На клетчатой бумаге нарисовали прямоугольный треугольник с катетами, равными 7 клеткам (см.рис.). Потом обвели все линии сетки, находящиеся внутри треугольника. Какое наибольшее количество треугольников можно найти на этом рисунке?
   

   Ответ: 28 треугольников
   Решение: Одна из сторон треугольника должна идти под

наклоном, т.е. лежать на отрезке ВС. Если зафиксировать какой-то диагональный отрезок, то оставшаяся вершина определяется однозначно. Т.е. надо выбрать две точки из 8, это можно сделать 7x8\2=28 способами.

6. Найдите все такие трёхзначные числа $\overline{ПВГ}$, состоящие из различных цифр *П*, *В* и *Г*, для которых выполняется равенство $\overline{ПВГ} = (П + В + Г)\times(П + В + Г + 1)$.

   Ответ:156.

   Решение: Заметим, что П+В+Г≥ 3 и ≤ 24 (т.к. цифры разные). Кроме того числа $\overline{ПВГ}$ и $(П + В + Г)$ должны давать одинаковые остатки при делении на 9. Это возможно только тогда, когда П+В+Г кратно 3. Заметим, что П+В+Г=9 – не подходит, т.к. $(П + В + Г)\times(П + В + Г + 1) = 90$ –двузначное. Перебирая 12, 15,18,21, 24, получаем $\overline{ПВГ} = 156 = 12\times13$.

Вариант 1-b

1. Петины часы спешат на 5 минут в час, а Машины – отстают на 8 минут в час. В 12-00 они поставили свои часы по школьным часам (которые идут точно) и договорились в полседьмого пойти вместе на каток. Сколько времени Петя будет ждать Машу, если каждый приходит на каток ровно в 18-30 по своим часам?

   Ответ: 1,5 часа.

   Решение: Петины часы идут со скоростью, составляющей 13/12 от обычной, поэтому 6,5 часов они проходят за 6 часов реального времени. Машины часы идут со скоростью 13/15 от обычной, поэтому 6,5 часов они пройдут за 7,5 часов реального времени.

2. Сколько трехзначных натуральных *чисел* имеют четное число различных натуральных делителей?

   Ответ: 878.

   Решение: Заметим, что только точные квадраты имеют нечетное число делителей (у не квадратов делители можно разбить дополняющие друг друга пары). Всего есть 900 трехзначных чисел. Из них точными квадратами являются 10^2, 11^2, …, 31^2=961 (32^2=1024 – четрыхзначное). Их 22, значит оставшиеся 900-22 = 878 – не квадраты.

3. На международный чемпионат по настольному теннису съехалось 200 участников. Игра идет на выбывание, т.е. в каждом матче участвует два игрока, проигравший выбывает из участия в чемпионате, а выигравший – остается. Найдите наибольшее возможное количество участников, которые выиграли не менее трех партий.

   Ответ:66.

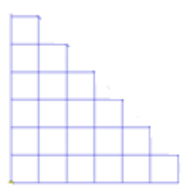
   Решение: Каждый участник (кроме победителя) проиграл кому-то одну партию. Таких 199, значит выиграть 3 партии не могло более 66 участников (им кто-то должен проиграть 3 партии).

   Покажем, что их могло быть 66. Пусть №4 выиграл у №1,2,3; №7 – у №4,5,6,… №199 – у №196,197,198, а №200 выиграл у №199. Тогда все участники с номерами дающими остаток 1 при делении на 3 (кроме первого) выиграли ровно по 3 партии.

4. Черепаха выползла из своего домика и поползла прямолинейно и равномерно со скоростью 5м/час. Через час она повернула на 90° (вправо или влево) и продолжила движение, потом ползла еще час, потом снова повернула на 90° (вправо или влево) … и т.д. Так она ползла 11 часов, поворачивая на 90° в конце каждого часа. На каком наименьшем расстоянии от домика она могла оказаться ?

   Ответ 5 м.

   Решение: Можно рассмотреть координатную сетку с узлами идущими через 5м. Очевидно, черепах ползет по



узлам этой сетки. В исходную позицию за 11 часов она вернуться не может. А на расстоянии 5 м может оказаться – легко построить пример.

5. На клетчатой бумаге нарисовали ступенчатый прямоугольный треугольник с катетами, равными 6 клеткам (см.рис.). Потом обвели все линии сетки, находящиеся внутри треугольника. Какое наибольшее количество прямоугольников можно найти на этом рисунке?

   Ответ: 126

   Решение: Для каждой клеточки найдем количество прямоугольников, в которых эта клеточка является правым верхним углом. Это несложно сделать, можно просто перемножить номер клетки по горизонтали и по вертикали (если начинать с левого нижнего угла и нумеровать с единицы).

6						
5	10					
4	8	12				
3	6	9	12			
2	4	6	8	10		
1	2	3	4	5	6	

Просуммировав числа по столбцам: 1+…+6+2(1+…5) + 3(1+…4) + 4(1+..+3)+5(1+2)+6= 21 + 30+30+24+15+6 = 126.

6. Найдите все такие трёхзначные числа $\overline{МГУ}$, состоящие из различных цифр *М*, *Г* и *У*, для которых выполняется равенство $\overline{МГУ} = (М+Г+У)\times(М+Г+У-2)$.

   Ответ: 195

   Решение: Заметим, что М+Г+У ≤ 24 (т.к. цифры разные). Кроме того числа $\overline{МГУ}$ и $(М+Г+У)$ должны давать одинаковые остатки при делении на 9. Это возможно только тогда, когда $М+Г+У$ кратно 3. Заметим, что $М+Г+У \leq 9$ – не подходит, т.к. $(М+Г+У)\times(М+Г+У-2)$ –двузначное. Перебирая 12, 15,18,21, 24, получаем $\overline{МГУ} = 195 = 15\times13$.

Все задания оценивались по 15 баллов (к итоговой сумме добавлялось 5 баллов).