Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников
«Покори Воробьевы горы»
по математике

Задания заключительного этапа 2015/2016 учебного года для 9 класса

1. Можете ли вы с помощью четырех арифметических действий (также можно использовать скобки) записать число 2016, используя последовательно цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

   Ответ: $1\cdot 2\cdot 3\cdot(4+5)\cdot 6\cdot 7\cdot 8:9=2016$.

2. Аня не сказала Мише, сколько ей лет, но сообщила, что на каждый ее день рождения мама бросает в копилку столько монет, сколько лет исполняется Ане. Миша оценил, что в копилке не менее 110, но не более 130 монет. Сколько же лет Ане?

   Ответ: 15. Решение. Либо воспользоваться формулой суммы арифметической прогрессии: $110\le\frac{1+n}{2}n\le 130$, либо просто посчитать сумму «в лоб».

3. Отрезок $[-3;9]$ является множеством значений функции $f(x)$, отрезок $[-1;6]$ является множеством значений функции $g(x)$. На какую наибольшую величину может отличаться наибольшее значение функции $f(x)\times g(x)$ от наименьшего значения этой функции?

   ОТВЕТ 72.

   Решение: Максимальное значение может быть 9*6 = 54, а минимальное (-3)*6=-18.

4. Сколько существует различных прямоугольных треугольников, один из катетов которых равен $\sqrt{2016}$, а другой катет и гипотенуза выражаются натуральными числами?

   ОТВЕТ: 12.

   Решение. По условию $c^2-b^2=a^2=2016$, то есть $(c-b)(c+b)=2^5\cdot 3^2\cdot 7$. Система $\begin{cases} c-b=n, \\ c+b=k \end{cases}$ (здесь *n* – один из делителей числа 2016, а $k=\frac{2016}{n}$) имеет натуральные решения $c=\frac{n+k}{2}$, $b=\frac{k-n}{2}$, если $n<k$ (то есть $n\le 44$) и *n* и *k* – четные.

   Возможные значения *n*: 2, $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=16$, $2\cdot 3=6$, $2^2\cdot 3=12$, $2^3\cdot 3=24$, $2\cdot 7=14$, $2^2\cdot 7=28$, $2\cdot 3^2=18$, $2^2\cdot 3^2=36$, $2\cdot 3\cdot 7=21$ – всего 12 вариантов.

5. Найдите все 4-значные числа, которые на 7182 меньше числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке.

ОТВЕТ: 1909

Решение. Запишем искомое число в виде $\overline{abcd}$

Тогда $\overline{abcd} = \overline{dcba} - 7182$, откуда $111(d\text{-}a)+10(c\text{-}b)=798$.

Очевидно, (d-a) может быть равно только 7 или 8.

В случае d-a=7 получим $10(c\text{-}b)=21$ – не подходит.

В случае d-a=8 получим $10(c\text{-}b) = -90$, следовательно, b-c=9, откуда b=9, c=0.

Равенство d-a=8 возможно при d=8, a=0 или d=9, a=1, но первая цифра не может быть равна нулю, следовательно, a=1, b=9, c=0, d=9.

6. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами BC=30 и AC=40. На сторонах AB, BC и CA выбраны точки C_1, A_1, B_1, соответственно, так, что $AC_1=BA_1=CB_1=1$. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$.

ОТВЕТ: 554,2

Решение: Обозначим $S(ABC) = 600 = S$. Тогда $S(AB_1C_1) = 1/50 \times 39/40 \times S$; $S(A_1BC_1) = 49/50 \times 1/30 \times S$; $S(A_1B_1C) = 29/30 \times 1/40 \times S$. Получим $S(K_1L_1M_1) = S(1 - 117/6000 - 196/6000 - 145/6000) = 5542/6000 \times 600 = 554{,}2$.

7. Число $n+2015$ делится на 2016, а число $n+2016$ делится на 2015. Найдите наименьшее натуральное n, при котором это возможно.

ОТВЕТ: 4058209.

Решение. По условию $\begin{cases} n+2015=2016m, \\ n+2016=2015k. \end{cases}$ Отсюда $2016m-2015k=-1$. Решение этого уравнения в целых числах: $m=-1+2015p$, $k=-1+2016p$. Значит,

$n+2015=2016(-1+2015p) = -2016+2016\cdot2015p$, то есть

$n=-2015-2016+2016\cdot2015p$. Наименьшее натуральное n равно

$2016\cdot2015-2015-2016 = 2015^2-2016$ = 4 058 209.

.

Олимпиада школьников
«Покори Воробьевы горы»
по математике

Задания заключительного этапа 2015/2016 учебного года для 9 класса

1. Расставьте знаки арифметических выражений и скобки в выражении, состоящем из трех чисел, $\frac{1}{8}\ldots\frac{1}{9}\ldots\frac{1}{28}$, так, чтобы результат вычислений был равен $\frac{1}{2016}$.

   ОТВЕТ: $\frac{1}{8}\times\frac{1}{9}\times\frac{1}{28}$ или $\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)\times\frac{1}{28}$

   Решение: разложить 2016 на простые множители и заметить, что 2016=8x9x28.

2. Коле вдвое больше лет, чем было Оле, когда Коле было столько лет, сколько сейчас Оле. А когда Оле будет столько лет, сколько сейчас Коле, то им в сумме будет 36 лет. Сколько лет Коле сейчас?

   ОТВЕТ: 16 лет.

   Решение: Обозначим x –текущий возраст Коли, y – Оли. Составим систему x=2*(y-(x-y)) ; x+(x-y) + y + (x-y)* = 36. Решим ее: x=16, y=12.

3. Будем называть *колебанием* функции разницу между ее наибольшим и наименьшим значением. Каким может быть максимальное колебание функции $f(x)\times g(x)$, если известно, что отрезок [-8, 4] является множеством значений функции $f(x)$, а отрезок [-2, 6] является множеством значений функции $g(x)$.

   ОТВЕТ: 72

   Решение: Максимальное значение $f(x)\times g(x)$ равно 24=4x6, минимальное -48=(-8)x6.

4. Сколько существует различных прямоугольных треугольников, один из катетов которых равен $\sqrt{1001}$, а другой катет и гипотенуза выражаются натуральными числами?

   ОТВЕТ: 4.

   Решение: запишем теорему Пифагора: a^2+1001=b^2. Отсюда получим *(b -a)(b+a)*=1001=7x11x13. Можно представить 1001 как произвденеи двух множителей 1x1001=7x143=11x91=13x77 – первый множитель должен быть меньше – всего 4 варианта.

5. Найдите все 4-значные числа, которые на 8802 больше числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке.

ОТВЕТ: 1099

Решение: Заметим, что $x+8802 < 10000$, следовательно, $x< 1198$, поэтому первая цифра равна 1, а вторая – 0 или 1. Сумма $x+8802$ оканчивается на 1, поэтому последняя цифра 9. Получаем число вида 10a9 или 11a9, получаем уравнение вида 10a9+8802=9a01 или 11a9+8802=9a11. Первое дает решение a=9, второе – решения не имеет.

6. Дан прямоугольный треугольник *KLM* с катетами $LM=60$ и $KM=80$. На сторонах *KL, LM* и MK выбраны точки M_1, K_1, L_1, соответственно, так, что $KM_1=LK_1=ML_1=2$. Найдите площадь треугольника $K_1L_1M_1$.

ОТВЕТ: 2216,8

Решение: Обозначим $S(KLM) = 2400 = S$. Тогда $S(KL_1M_1) = 2/100 \times 78/80 \times S$; $S(K_1LM_1) = 98/100 \times 2/60 \times S$; $S(K_1L_1M) = 58/60 \times 2/80 \times S$. Получим $S(K_1L_1M_1) = S(1 – 468/24000 – 580/24000 – 784/24000) = 22168/24000 \times 2400 = 2216{,}8$.

7. Найдите все пары целых чисел (*x, y*) для которых выполнено равенство $x^2+y^2=x+y+2$.

ОТВЕТ: (-1,0); (-1,1); (0,-1); (0,2); (1,-1), (1,2), (2,0); (2,1)

Решение: Функция x2-x принимает значения от -0.25 до бесконечности, -y2+y+2 от минус бесконечности до 2.25. Общие значения (целые) 0,1,2, Дальше подбором.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы» по математике

Задания заключительного этапа 2015/2016 учебного года для 9 класса

1. Знайка сказал Незнайке, что для того, чтобы перевести килолуны (единица массы, которую используют коротышки на Луне) в килограммы нужно разделить массу в килолунах на 4 и полученное число уменьшить на 4%. Незнайка решил, что для перевода из килограммов в килолуны нужно массу в килограммах умножить на 4 и полученное число увеличить на 4%. На сколько процентов от правильного значения массы в килолунах он ошибётся, если будет так переводить?

   ОТВЕТ: на 0,16%.

   Решение: Один килолун составляет 0.25*0.96 = 0.24 кг. Следовательно, в одном килограмме 25/6 килолунов. Если Незнайка будет переводить 1 кг, то получит 4*1.04 = 4.16, что составляет 99,84% от 25/6.

2. Найдите наибольшее натуральное число, которое невозможно представить в виде суммы двух составных чисел.

   ОТВЕТ: 11

   Решение: Четные числа, большие 8 можно представить как сумму двух четных чисел, больших 2. А нечетные числа, большие 12 можно представить как сумму 9 и четного составного числа. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что 11 так представить нельзя.

3. Решите уравнение $\frac{\sqrt{(-x)^2}+(\sqrt{-x})^2}{x^2+(-x)^2}=\frac{1}{2016}$

   ОТВЕТ:x=-2016.

   Решение: Заметим, что x<0 из ОДЗ, представим уравнение как $\frac{-2x}{2x^2}=\frac{1}{2016}$.

4. Пусть $f(x) = x^2+px+q$ где *p, q* – некоторые коэффициенты. На какую наименьшую величину может отличаться наибольшее значение функции $g(x) = |f(x)|$ от наименьшего значения этой функции на отрезке [2;6]?

   ОТВЕТ: на 2.

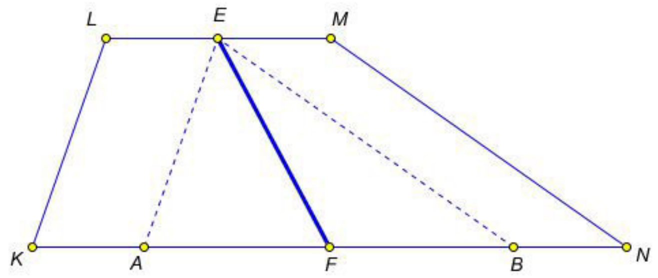
   Решение: Для $f(x) = x^2+px+q$ наибольшее значение от наименьшего будет отличаться не менее, чем на 4 (это можно показать графически). Подбирая *q*, получим, что наибольшее значение модуля от наименьшего отличается не более, чем на 2. Пример: $f(x) = (x-4)^2-2$.

5. Сколько существует пятизначных чисел вида $\overline{ab16c}$, кратных 16? (*a, b, c* – произвольные цифры, не обязательно разные).

ОТВЕТ: 90.

Решение: Заметим, что первая цифра не влияет на делимость, следовательно, a=1,…,9. С Другой стороны, из делимости на 8 вытекает, что c=0 или 8. Если c=0, то b должно быть четным, а при c=8 – нечетным. В обоих случаях получаем по 5 вариантов, откуда общее количество 9*(5+5) = 90.

6. В трапеции *KLMN* известны основания *KN*=25, *LM*=15 и боковые стороны *KL*= 6, *MN* = 8. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований.



ОТВЕТ: 5.

Решение: Проведем *EA* параллельно *KL* и *EB* параллельно *MN* (см. рис). Треугольник *ABE* – прямоугольный со сторонами 6,8,10. *EF* – медиана, т.е. равна половине гипотенузы.

7. Решить в целых числах уравнение $x^6=y^3+217$.

ОТВЕТ: (-1,-6) (1,-6) (-3,8), (3,8).

Решение: Заметим, что $y^3+217 >= 0$, следовательно, y >= -6.

Проверяем, что Y=-1,-2,-3,-4,-5 не дают решения, при y=-6 получаем x=+/-1.

Заметим, что $y^3+217 = x^6 >=(y+1)^3$, откуда $y^2+y <=72$, т.е. y<=8. Значит $x^6 <=$ 8^3+217 = 729. Поэтому |x| <= 3. Проверка показывает, что подходят x=+/-3, y = 8.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников
«Покори Воробьевы горы»
по математике

Задания заключительного этапа 2015/2016 учебного года для 9 класса

1. Мудрый Гендальф сказал Фродо, что для того, чтобы перевести эльфийские мили в обычные нужно разделить расстояние в эльфийских милях на 5 и полученное число уменьшить на 5%. Фродо решил, что для перевода из человеческих миль в эльфийские нужно расстояние в обычных милях умножить на 5 и полученное число увеличить на 5%. На сколько процентов от правильного значения расстояния в эльфийских милях он ошибётся, если будет так переводить?

ОТВЕТ: на 0.25% (решение – см. v2a).

2. Филателист Андрей решил разложить все свои марки поровну в 3 конверта, но оказалось, что одна марка лишняя. Когда он разложил их поровну в 5 конвертов, лишними оказались 3 марки; наконец, когда он разложил их поровну в 7 конвертов, осталось 5 марок. Сколько всего марок у Андрея, если известно, что недавно он купил для них дополнительный альбом, вмещающий 150 марок, так как такого же старого альбома уже не хватало?

ОТВЕТ: 208.

Решение. Если искомое число *x*, то число $x+2$ должно делиться на 3, 5 и 7, т. е. имеет вид $3\cdot 5\cdot 7\cdot p$. Значит, $x=105p-2$. Так как по условию $150<x\le 300$, то $p=2$. Поэтому $x=208$.

3. Решите уравнение $\left(\sqrt{x}\right)^{2016}+\left(\sqrt{1-x}\right)^{2016}=1.$

ОТВЕТ: *x* = 0 или 1.

Решение: Из ОДЗ 0<=x<=1. Видно, что 0 и 1 подходят. Если же 0<x<1, то $\left(\sqrt{x}\right)^{2016}+\left(\sqrt{1-x}\right)^{2016}<x+(1-x)=1$, и не может быть решением.

4. Пусть $F(x)=x^2+ax+b$ где *a, b* – некоторые коэффициенты. На какую наименьшую величину может отличаться наибольшее значение функции $G(x)=|F(x)|$ от наименьшего значения этой функции на отрезке [-1;5]?

ОТВЕТ: 4,5. (решение – см. v2a).

5. Найдите все натуральные числа, которые в 36 раз больше суммы своих цифр.

ОТВЕТ: 324; 648.

Решение. Обозначим через $S(x)$ сумму цифр числа *x*. Тогда уравнение $x = 36 \cdot S(x)$ не имеет решений при $n \geq 5$, так как $x \geq 10^{n-1}$, а $36 \cdot S(x) \leq 36 \cdot 9 \cdot n = 324n < 10^3 \cdot n$. При $n = 4$ решений тоже нет, так как (здесь *a*, *b*, *c*, *d* – цифры числа):

$$a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d > 36(a+b+c+d) \Leftrightarrow 964a + 64b > 26 \cdot 9 + 35 \cdot 9 \geq 26c + 35d.$$

При $n = 3$: $a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = 36(a+b+c) \Leftrightarrow 64a = 26b + 35c$. После этого перебор. В результате получаются числа 324 и 648.

При $n = 2$: $a \cdot 10 + b = 36(a+b) \Leftrightarrow 26a = 35b$ – решений нет.

6. В трапеции *ABCD* известны основания *AD*=12, BC=7 и боковые стороны *AB* = 3, *CD* = 4. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований трапеции.

ОТВЕТ: 2,5. (решение – см. v2a).

7. Решите в натуральных числах уравнение $2n - \frac{1}{n^5} = 3 - \frac{2}{n}$

ОТВЕТ: *n*=1.

Решение: $2n = 3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^5} \leq 3$, подходит только n=1

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников
«Покори Воробьевы горы»
по математике

Задания заключительного этапа 2015/2016 учебного года для 9 класса

1. Найдите наименьшее натуральное N, такое, то N+2 делится (без остатка) на 2, N+3 – на 3, …, N+10 – на 10.

   ОТВЕТ:2520.

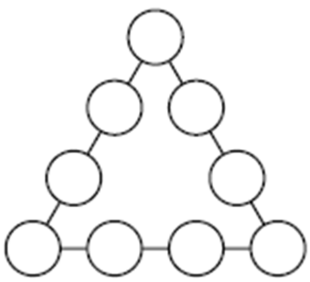
   Решение: Заметим, что N должно быть кратно 2,3,4, …, 10, следовательно, N= НОК (2,3,4,..,10)= 2^3x3^2x5x7= 2520.

2. Пятеро бегунов бежали эстафету. Если бы первый бежал в два раза быстрее, то они бы потратили на 5% меньше времени. Если бы второй бежал в два раза быстрее, то потратили бы на 10% меньше времени. Если бы третий бежал в два раза быстрее, то потратили бы на 12% меньше времени. Если бы четвертый бежал в два раза быстрее, то потратили бы на 15% меньше времени. На сколько процентов меньше времени они бы потратили, если бы пятый бежал в два раза быстрее?

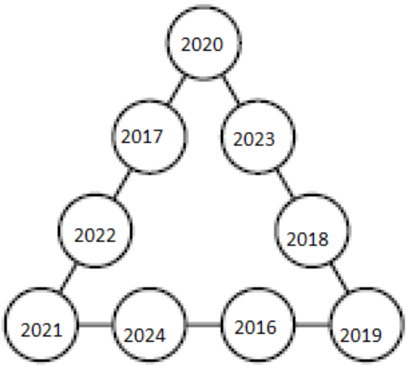
   ОТВЕТ: на 8%

   Решение: Если бы каждый бежал в два раза быстрее, то они пробежали бы быстрее на 50%. Значит, если бы 5-й бежал быстрее, то время уменьшилось бы на 50-5-10-12-15 = 8%.

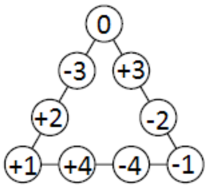
3. Можно ли расставить числа 2016, 2017, …, 2024 на указанные позиции (см. рис.), так, чтобы сумма чисел стоящих на каждой стороне треугольника была одинаковой?



   ОТВЕТ: Да, можно, см. рис.

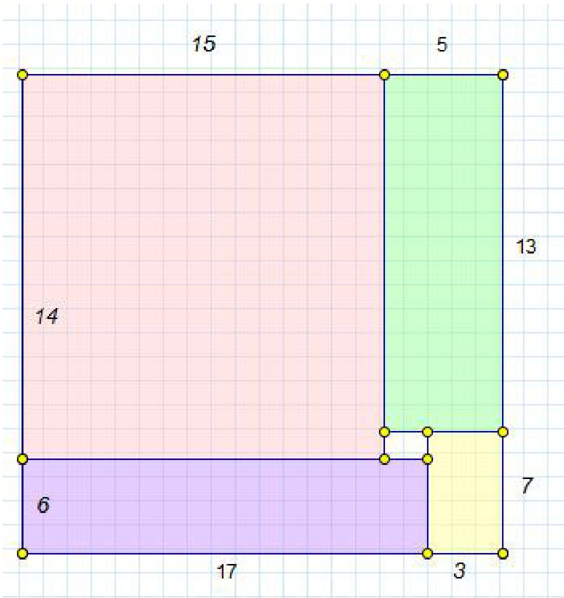


Решение: Сначала поставим во всех точках среднее значение 2020. Потом расставим 0,+/-1, +/-2, +/-3, +/-4, так, чтобы сумма на каждой стороне была равна 0 (см. рис). Возможны и другие варианты расстановки.



4. Дан квадрат 1x1. Разрежьте его на 5 прямоугольников, так, чтобы все 10 чисел, соответствующие ширине и высоте каждого прямоугольника были различными рациональными числами.

ОТВЕТ: Возьмем квадрат 20x20, разрежем на прямоугольники с целыми сторонами (см.рис.), потом уменьшим все стороны в 20раз. Возможны и другие варианты решения



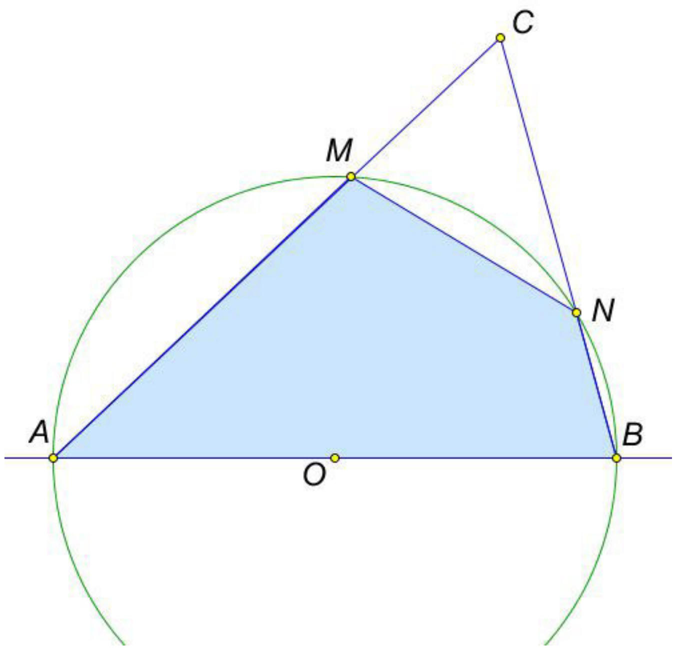
5. Найдите количество 10-значных чисел, сумма цифр которых не превосходит 87.

Найдите наименьшее натуральное число *N*, такое, что число 99*N* состоит из одних троек.

ОТВЕТ: 3367.

Решение. Число 33N должно состоять из одних единиц. Число делится на 33, если оно делится на 3 и на 11. Число состоящее из одних единиц делится на 3, если число единиц кратно 3 и делится на 11, если число единиц кратно 2. Наименьшее такое число – 111111, значит 33N = 111111, откуда N=3367.

6. Окружность с диаметром *AB* пересекает отрезки *AC* и *BC* в точках *M* и *N*, соответственно, причем длина отрезка *MN* равна радиусу окружности. Найдите площадь четырехугольника *ABNM*, если известно, что *AC*=12 и *BC*=8.



ОТВЕТ: $18\sqrt{3}$.

Решение: Дуга MN составляет 60° поэтому угол C равен 60°, следовательно, площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2} AC \cdot BC \sin 60^o = 24\sqrt{3}$. Треугольники ABC и MNC подобны с коэффициентом ½, поэтому площаь MNC в 4 раза меньше – $6\sqrt{3}$. Отсюда площадь AMNB равна $18\sqrt{3}$.

7. Найдите все пары натуральных чисел (x,y), для которых выполнено равенство $x^2+xy = y+92$.

ОТВЕТ: (2,88); (8,4).

Решение: Преобразуем x^2-1+xy-y=91. Разложим на множители (x-1)(x+y+1)=7x13. Оба сомножителя положительны и первый множитель должен быть меньше, поэтому возможны варианты x-1 = 1, x+y+1=91 или x-1 = 7,

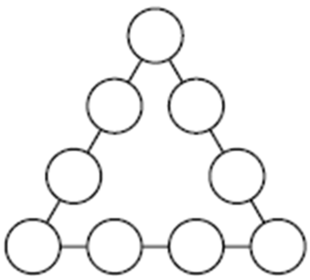
$x+y+1=13$. получаем ответы $x=2$, $y = 88$ или $x=8$, $y=4$

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы» по математике

Задания заключительного этапа 2015/2016 учебного года для 9 класса

1. Папа, мама, дедушка, бабушка и маленький Алёша сажали картофель. Если бы папа сажал картофель в два раза быстрее, то они бы потратили на 18% меньше времени на посадку. Если бы мама сажала в два раза быстрее, то они потратили бы на 12% меньше времени. Если бы дедушка сажал в два раза быстрее, то потратили бы на 10% меньше времени. Если бы бабушка сажала в два раза быстрее, то они потратили бы на 8% меньше времени. На сколько процентов меньше времени они бы потратили, если бы Алеша сажал картофель в два раза быстрее?
2. Можно ли расставить числа 2020, 2021, …, 2028 на указанные позиции (см. рис.), так, чтобы сумма чисел стоящих на каждой стороне треугольника была одинаковой?



3. Найдите 5 прямоугольников, из которых можно сложить квадрат размера 15x15, причем таких, что все 10 чисел, соответствующие ширине и высоте каждого прямоугольника являются различными целыми числами.
4. Найдите количество 20-значных чисел, сумма цифр которых не превосходит 177.
5. Найдите наименьшее натуральное число N, такое, что число $99N$ состоит из одних единиц.
6. Окружность с диаметром PQ пересекает отрезки PR и QR в точках A и B, соответственно, причем длина отрезка AB равна радиусу окружности. Найдите площадь четырехугольника $PABQ$, если известно, что AR=4 и BR=6.
7. Найдите все пары натуральных чисел (m,n), для которых выполнено равенство $m^2+mn = n+144$.

2015/2016 учебный год

КРИТЕРИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОБЕДИТЕЛЕЙ И ПРИЗЁРОВ[2]

олимпиады школьников

«ПОКОРИ ВОРОБЬЁВЫ ГОРЫ!»

по математике

5-9 классы

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ:

*От **100** баллов включительно.*

ПРИЗЁР:

*От **85** баллов до **99** баллов включительно.*

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ (дипломант I степени):

*От **100** баллов включительно.*

ПРИЗЁР (дипломант II степени):

*От **90** баллов до **99** баллов включительно.*

---

[2] *Утверждены на заседании жюри олимпиады школьников «Покори Воробьевы горы!» по математике*