Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **3–1***

1. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу выехали два автобуса, которые встретились 2 февраля в $12:00$. Найдите дату и время начала движения автобусов, если их скорости на всем пути постоянные, и один из них прибыл 3 февраля в $4:00$ в пункт B, а другой прибыл 3 февраля в $13:00$ в пункт A.

2. Через точку, лежащую на оси цилиндра радиуса $\sqrt{3}$ и отстоящую от ближайшего к ней основания цилиндра на расстояние 1, проведена плоскость. Найдите объем меньшей части цилиндра, отсекаемой этой плоскостью, если угол между осью цилиндра и плоскостью равен 60°.

3. Найдите решения неравенства

$$\sqrt{\sin x + \frac{1}{2}} > 2\sin x$$

на отрезке $[-\frac{1}{2}; \frac{8}{3}]$.

4. Найдите произведение корней уравнения

$$\log_{5+\sqrt{15}}(x^2 - 2x - 2) = \log_{5-\sqrt{15}}(12 + 2x - x^2).$$

5. Найдите все значения a, при которых существует целое число n, удовлетворяющее уравнению $n^2 \cdot 3^a - 3^a - 16n = 9 \cdot 3^{-a} - 3^{2-a} \cdot n^2$.

март 2015 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **3–2***

1. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу выехали два автобуса, которые встретились 9 февраля в $12:00$. Найдите дату и время начала движения автобусов, если их скорости на всем пути постоянные, и один из них прибыл 9 февраля в $21:00$ в пункт B, а другой прибыл 10 февраля в $13:00$ в пункт A.

2. Через точку, лежащую на оси цилиндра радиуса $\sqrt{3}$ и отстоящую от ближайшего к ней основания цилиндра на расстояние 3, проведена плоскость. Найдите объем меньшей части цилиндра, отсекаемой этой плоскостью, если угол между осью цилиндра и плоскостью равен 30°.

3. Найдите решения неравенства

$$\sqrt{\cos x + \frac{1}{2}} > 2\cos x$$

на отрезке $[-2; \frac{16}{15}]$.

4. Найдите произведение корней уравнения

$$\log_{5+\sqrt{15}}(x^2 - 2x - 3) = \log_{5-\sqrt{15}}(13 - x^2 + 2x).$$

5. Найдите все значения a, при которых существует целое число n, удовлетворяющее уравнению $3 \cdot 2^a + 3 \cdot 2^{-a} = 16n + 3n^2 \cdot 2^a + 3n^2 \cdot 2^{-a}$.

март 2015 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

Вариант 4–1

1. В контейнере находятся изделия нескольких типов из пяти возможных: весом 1 кг, 2 кг, 3 кг, 5 кг и 10 кг. Суммарный вес изделий в контейнере равен 100 кг. Известно, что если выбрать из контейнера по одному изделию каждого из имеющихся в нем типов, то их суммарный вес будет равен 15 кг. Количество самых тяжелых из находящися в контейнере изделий на 5 больше, чем количество всех остальных изделий в нем. Определите, какие типы изделий и в каком количестве находятся в контейнере.

2. Решите уравнение
$$\left|\log_2 \frac{x}{2}\right|^3 + |\log_2 2x|^3 = 28.$$

3. Найдите наибольшее натуральное число не превосходящее 2015, такое что при умножении на 5 сумма его цифр (в десятичной записи) не меняется.

4. Окружность касается одной из сторон угла с вершиной A в точке B и пересекает вторую сторону в точках C и D, причем AD в три раза меньше AC. Косинус угла A равен $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

а. Найдите отношение BC к BD.

б. Найдите отношение радиуса окружности к BD.

5. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 2\sin x + \sin^2 y - \sin^2 x \cos^2 y = 1, \\ 2\cos^2 x + 4\sin x - \cos^3 y = 5. \end{cases}$$

март 2015 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

Вариант 4–2

1. В контейнере находятся изделия нескольких типов из пяти возможных: весом 1 кг, 3 кг, 5 кг, 7 кг и 10 кг. Суммарный вес изделий в контейнере равен 100 кг. Известно, что если выбрать из контейнера по одному изделию каждого из имеющихся в нем типов, то их суммарный вес будет равен 15 кг. Количество самых тяжелых из находящися в контейнере изделий на 8 больше, чем количество всех остальных изделий в нем. Определите, какие типы изделий и в каком количестве находятся в контейнере.

2. Решите уравнение
$$\left|\log_3 \frac{x}{9}\right|^3 + |\log_3 x|^3 = 28.$$

3. Найдите наибольшее натуральное число не превосходящее 2024, такое что при умножении на 5 сумма его цифр (в десятичной записи) не меняется.

4. Окружность касается одной из сторон угла с вершиной A в точке B и пересекает вторую сторону в точках C и D, причем AD в пять раз меньше AC. Косинус угла A равен $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

а. Найдите отношение BC к BD.

б. Найдите отношение радиуса окружности к BD.

5. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 2\cos x + \cos^2 y - \cos^2 x \sin^2 y = 1, \\ 4\cos x - 2\cos^2 x - \sin^3 y = 3. \end{cases}$$

март 2015 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

Вариант ***5–1***

1. Сравните $\sqrt{|8\sqrt{3}-16|}-\sqrt{8\sqrt{3}+16}$ и наименьший корень уравнения $4x^2+21x+17=0$.

2. Окружности с центрами в точках O_1 и O_2 пересекаются внешним образом в точках A и B (т.е точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от прямой AB). Известно,что $\angle AO_1B=\alpha$, $\angle AO_2B=\beta$, $O_1O_2=a$. Найдите радиусы окружностей.

3. Найдите корни уравнения $\log_2|\operatorname{tg}\pi x|+\log_4\dfrac{\cos\pi x}{2\cos\pi x+\sin\pi x}=0$, принадлежащие отрезку $\left[\frac{9}{4};3\right]$.

4. Для перевозки 60 тонн песка автомобилю потребовалось сделать некоторое количество рейсов, а для перевозки 120 тонн песка оказалось необходимо на 5 рейсов больше. На всех рейсах, кроме, может быть, последнего в каждой из этих двух перевозок, автомобиль загружается полностью. Определите все возможные значения грузоподъёмности этого автомобиля (то есть наибольшей массы груза, которую автомобиль может перевезти за один раз).

5. Решите уравнение $|x\sqrt{1-x^2}+x|=\sqrt{1+x^2}$.

март 2015 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

Вариант ***5–2***

1. Сравните $\sqrt{|12\sqrt{3}-31|}-\sqrt{12\sqrt{3}+31}$ и наименьший корень уравнения $4x^2+19x+15=0$.

2. Окружности с центрами в точках O_1 и O_2 пересекаются внутренним образом в точках A и B (т.е точки O_1 и O_2 лежат по одну сторону от прямой AB). Известно,что $\angle AO_1B=\alpha$, $\angle AO_2B=\beta$, $\beta>\alpha$ и $O_1O_2=a$. Найдите радиусы окружностей.

3. Найдите корни уравнения $\log_2|\operatorname{ctg}\pi x|+\log_4\dfrac{\sin\pi x}{2\sin\pi x+\cos\pi x}=0$, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7}{8};2\right]$.

4. Для перевозки 50 тонн песка автомобилю потребовалось сделать некоторое количество рейсов, а для перевозки 100 тонн песка оказалось необходимо на 5 рейсов больше. На всех рейсах, кроме, может быть, последнего в каждой из этих двух перевозок, автомобиль загружается полностью. Определите все возможные значения грузоподъёмности этого автомобиля (то есть наибольшей массы груза, которую автомобиль может перевезти за один раз).

5. Решите уравнение $|x\sqrt{4-x^2}+2x|=2\sqrt{4+x^2}$.

март 2015 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **6–1***

1. Решите уравнение

$$(1+x+x^2)(1+x+x^2+\dots+x^{10})=(1+x+x^2+\dots+x^6)^2.$$

2. Две арифметические прогрессии содержат по 2015 членов каждая. Отношение последнего члена первой прогрессии к первому члену второй равно отношению последнего члена второй прогрессии к первому члену первой и равно 4. Отношение суммы всех членов первой прогрессии к сумме всех членов второй равно 2. Найдите отношение разностей этих прогрессий и приведите пример таких прогрессий.

3. Решите систему

$$\begin{cases}\operatorname{tg}^2\pi(x-y)+\operatorname{ctg}^2\pi(y-x)=\sqrt{\frac{2x}{x^2+1}}+1,\\ x^2+y^2\leqslant 10.\end{cases}$$

4. Плоскость проходит через точку K, лежащую на ребре SA пирамиды $SABC$, делит биссектрису SD грани SAB и медиану SE грани SAC пополам. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды, если $SK:KA=SA:SB=2$?

5. Найдите все значения a при каждом из которых уравнение

$$25^{-|x-a|}\log_{\sqrt[5]{7}}(x^2-2x+3)+5^{-x^2+2x}\log_{1/7}(2|x-a|+2)=0$$

имеет ровно три различных решения.

март 2015 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **6–2***

1. Решите уравнение

$$(1-x+x^2)(1-x+x^2-\dots+x^{10})=(1-x+x^2-\dots+x^6)^2.$$

2. Две арифметические прогрессии содержат по 2015 членов каждая. Отношение последнего члена первой прогрессии к первому члену второй равно отношению последнего члена второй прогрессии к первому члену первой и равно 5. Отношение суммы всех членов первой прогрессии к сумме всех членов второй равно 2. Найдите отношение разностей этих прогрессий и приведите пример таких прогрессий.

3. Решите систему

$$\begin{cases}\operatorname{tg}^2\pi(2x-y)+\frac{1}{\sin^2\pi(y-2x)}=\sqrt{\frac{2x}{x^2+1}}+2,\\ x^2+y^2\leqslant 10.\end{cases}$$

4. Плоскость проходит через точку K, лежащую на ребре SA пирамиды $SABC$, делит медианы SD и SE граней SAB и SBC пополам. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды, если $SK:KA=2$?

5. Найдите все значения a при каждом из которых уравнение

$$9^{-|x-a|}\log_{\sqrt[3]{5}}(x^2+2x+3)+3^{-x^2-2x}\log_{1/5}(2|x-a|+2)=0$$

имеет ровно три различных решения.

март 2015 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

Вариант ***7–1***

1. Из четырёх бегунов: Антона, Бориса, Виктора и Григория, – второе место занял самый старший. При этом Антон пробежал дистанцию быстрее, чем Виктор; Григорий – быстрее, чем Борис и Виктор. Известно также, что Борис старше Антона, а Виктор старше Григория. В каком порядке финишировали спортсмены?

2. На доске написаны числа 1, 2, …, 2015. Над ними последовательно проделывают 2014 операций, причем n-я по счету операция состоит в следующем: произвольные два числа a и b (из записанных на доске) стираются и дописывается одно число, равное $\frac{ab}{n}$. Что останется на доске в конце?

3. В четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 2$, $BC = 4$, $CD = 5$ вписали окружность и вокруг него описали окружность. Найдите площадь четырёхугольника.

4. Решите уравнение:

$$\frac{\cos 4x - 6\cos^2 2x + 8\cos^2 x}{\sqrt{6x - x^2 - 5}} = 0.$$

5. При каждом значении a решите уравнение

$$|x-1|+|x+1|+|x-2|+|x+2|+|x-3|+|x+3|+\dots+|x-2015|+|x+2015|+$$
$$+\,2x^2+2a^2+4030^2-8060x-8060a=4030x.$$

март 2015 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

Вариант ***7–2***

1. Из четырёх лыжников: Андрея, Бориса, Валерия и Геннадия, — второе место занял самый младший. При этом Геннадий финишировал раньше, чем Борис; Андрей — раньше, чем Борис и Валерий. Известно также, что Валерий младше Геннадия, а Борис младше Андрея. В каком порядке финишировали спортсмены?

2. На доске написаны числа 1, 2, …, 2014. Над ними последовательно проделывают 2013 операций, причем n-я по счету операция состоит в следующем: произвольные два числа a и b (из записанных на доске) стираются и дописывается одно число, равное $\frac{ab}{n}$. Что останется на доске в конце?

3. Вокруг четырёхугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 3$, $BC = 2$, $CD = 5$ описали окружность и в четырёхугольник вписали окружность. Найдите площадь четырёхугольника.

4. Решите уравнение:

$$\frac{\cos 4x - 4\cos^2 2x + 6\cos^2 x}{\sqrt{4x - x^2 + 5}} = 0.$$

5. При каждом значении c решите уравнение

$$|x-1|+|x+1|+|x-2|+|x+2|+|x-3|+|x+3|+\dots+|x-2014|+|x+2014|+$$
$$+\,2x^2+2c^2+4028^2-8056x-8056c=4028x.$$

март 2015 г.