ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«ПОКОРИ ВОРОБЬЁВЫ ГОРЫ!»

решения задач заочного тура по МАТЕМАТИКЕ

2014/2015 учебный год

1. (5-7,8,9) На столе стоит 2014 коробок, в некоторых из них есть конфеты, а остальные пусты.
   На первой коробке написано: «Все коробки пустые».
   На второй — «По крайней мере 2013 коробок пустые».
   На третьей — «По крайней мере 2012 коробок пустые».
   ...
   На 2014-й — «По крайней мере одна коробка пустая».
   Известно, что надписи на пустых коробках ложны, а на коробках с конфетами — истинные. Определите, сколько коробок с конфетами?

   Ответ: 1007.

   Решение: Допустим, что N коробок пустые, тогда $2014 - N$ коробок содержат конфеты. Заметим, что на коробке с номером k написано, что имеется не менее $2015 - k$ пустых. Поэтому надписи на коробках с номерами 1, 2, ..., $2014 - N$ являются ложными. Следовательно, $N = 2014 - N$, откуда $N = 1007$.

2. (5-7) Сережа собирает игрушечные железные дороги. У него есть несколько наборов, в каждом из которых разное количество вагонов. Если все наборы объединить в один состав, то в нем будет 112 вагонов. Если взять три самых маленьких набора, то в них будет 25 вагонов, а в трех самых больших — 50 вагонов. Сколько наборов у Сережи? Сколько вагонов в самом большом наборе?

   Ответ: 9 наборов. 18 или 19 вагонов.

   Решение: Обозначим a_1, a_2, ..., a_n — количества вагонов в наборах, упорядоченные по-возрастанию. Заметим, что $a_3 \geqslant 9$, т.к. иначе их суммарная длина трех самых маленьких наборов получается меньше $a_1 + a_2 + a_3 \leqslant 7 + 8 + 9 = 24 < 25$.

   Аналогично, $a_{n-2} \leqslant 16$, иначе $a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \geqslant 16+17+18 = 51 > 50$.

   Итак, оставшиеся $112-50-25 = 37$ вагонов составляют наборы, длины которых расположены в диапазоне от 10 до 15. Если предположить, что количество этих наборов равно 1 или 2, то их суммарная длина не более 30. А если преположить, что их 4 или более, то их суммарная длина будет более 40. Таким образом, количество таких наборов равно 3, а, следовательно, общее число наборов равно 9.

   Поскольку $a_7 \leqslant 16$, то $a_8 + a_9 \geqslant 50 - 16 = 34$. Такое возможно только в случае, когда $a_9 \geqslant 18$. Случай $a_9 > 19$ невозможен, т.к. тогда $a_7 + a_8 < 50 - 19 = 31$, следовательно, $a_7 \leqslant 14$, поэтому, $a_4 + a_5 + a_6 \leqslant 11 + 12 + 13 = 36 < 37$. Можно показать, что оба случая возможны указав длины явным образом: $\{7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 17, 18\}$ и $\{7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 19\}$.

3. (5-7,8) У Незнайки и Пончика есть одинаковые суммы денег, составленные из монет достоинством 1, 3, 5 и 7 фертингов.

   При этом у Незнайки 1-фертинговых монет столько же, сколько у Пончика 3-фертинговых;
   3-фертинговых — столько же, сколько у Пончика 5-фертинговых;
   5-фертинговых — столько же, сколько у Пончика 7-фертинговых;
   а 7-фертинговых — столько же, сколько у Пончика 1-фертинговых;

   Определите, сколько 7-фертинговых монет у Незнайки, если известно, что у каждого — по 20 монет.

   Ответ: 5 монет.

   Решение: Обозначим x, y, z, t — количества 1,3,5 и 7-фертинговых монет у Незнайки. При этом известно, что $x+y+z+t=20$ и $x+3y+5z+7t=3x+5y+7z+t$. Из последнего равенства вытекает, что $6t=2(x+y+z)$. Подставляя $x+y+z=20-t$, получим уравнение $6t=2(20-t)$, решение которого $t=5$.

4. (5-7, 8) Пин-код телефона состоит из 4 цифр (и может начинаться с нуля, например, 0951). Петя называет «счастливыми» такие пин-коды, у которых сумма крайних цифр равна сумме средних, например 1357: 1+7=3+5. В своем телефоне он использует только «счастливые» пин-коды. Петя говорит, что даже если забудет одну цифру (но будет помнить ее позицию), то он легко ее восстановит. А если он забудет две цифры (но будет помнить их позиции), то ему придется перебрать лишь небольшое количество пин-кодов.
   a) Сколько пин-кодов придется перебрать Пете в худшем случае?
   b) Сколько существует всего «счастливых» пин-кодов?

   Ответ: a) 10; b) 670.

   Решение: a) Очевидно, что в худшем случае Петя перебирает все возможные значения для одной цифры и по ним восстанавливает пин-код. Таким образом надо перебрать не более 10 комбинаций. На примере пин-кода 0099 можно убедиться, что если забыть две средние цифры, то надо перебрать ровно 10 комбинаций. b) Сумма пары цифр может принимать значения от 0 до 18. Несложно заметить, что сумма, равная 0 получается только одним способом, равная 1 — двумя, ... , равная 10 — 11 способами, ..., равная 18 — одним. Итого, общее число счастливых пин-кодов равно $N=1^2+2^2+\ldots+10^2+11^2+10^2+\ldots+1^2=670$.

5. (5-7,8) Имеется 10 отрезков, длина каждого из которых выражается целым числом, не превосходящим некоторого N. a) Пусть $N=100$. Приведите пример набора из 10 отрезков, такого, что ни из каких трех нельзя сложить треугольник. b) Найдите максимальное N, при котором можно гарантировать, что найдутся три отрезка, из которых можно сложить треугольник?

   Ответ: a) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55; b) $N=54$.

Решение: a) Если выбирать каждый новый отрезок таким образом, чтобы он был равен сумме двух наибольших из остальных, то треугольник с его участием составить нельзя.

b) Из предыдущего пункта видно, что для $N = 55$ такую последовательность можно построить.

Покажем, что для $N = 54$ такую последовательность построить уже не удастся. Упорядочим по-возрастанию длины отрезков $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_{10} \leqslant 54$. Если из отрезков длин a_i, a_{i+1}, a_{i+2} нельзя составить треугольник, то это означает, что нарушается неравенство треугольника, т.е. $a_{i+2} \geqslant a_i + a_{i+1}$. Таким образом, поскольку, очевидно $a_1, a_2 \geqslant 1$, то, последовательно применяя это неравенство для $i = 1, 2, ..., 8$, получим: $a_3 \geqslant a_1 + a_2 \geqslant 2$, $a_4 \geqslant a_2 + a_3 \geqslant 3$, ... $a_{10} \geqslant a_8 + a_9 \geqslant 55$, что приводит к противоречию.

6. (5-7,8) Можно ли найти 100 последовательных натуральных чисел, первое из которых делится на 3, второе — на 5, третье — на 7, ..., 100-е — на 201?

   Ответ: Да.

   Решение: Начать с $n = \frac{3+3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot201}{2}$ — это число целое, т.к. числитель — четный и кратно 3, поскольку числитель кратен 3. Аналогично $n+1 = \frac{5+3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot201}{2}$ кратно 5, $n+2 = \frac{7+3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot201}{2}$ кратно 7, ..., $n+99 = \frac{201+3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot201}{2}$ кратно 201.

7. (5-7,8,9) a) В таблице 3x4 надо расставить числа от 1 до 12 так, чтобы разность любых двух чисел, стоящих в одной строке была кратна 3, а разность любых двух чисел в одном столбце — кратна 4. Пример такой расстановки:

1	4	7	10
5	8	11	2
9	12	3	6

   Сколькими способами это можно сделать? b) Можно ли расставить числа от 1 до 24 в таблице 6×4 так, чтобы разность любых двух чисел в одной строке была кратна 6, а разность любых двух чисел в одном столбце была кратна 4?

   Ответ: a) $144 = 3! \cdot 4!$; b) Нет.

   Решение: a) Каждому столбцу можно поставить в соответствие остаток от деления на 4, а каждой строке — от деления на 3. Рассмотрев все возможные перестановки остатков от деления на 3 и на 4 получаем $3! \cdot 4! = 144$. b) Предположим, что такая таблица существует. Поставим в соответствие строкам остатки от деления на 6 и столбцам остатки от деления на 4. Тогда на пересечении строки с остатком 0 и столбца с остатком 1 не может стоять никакого числа (оно должно быть четным и нечетным одновременно).

8. (8,9) Известно, что число $\frac{(2+\sqrt{3})^4+(2-\sqrt{3})^4}{(2+\sqrt{3})^6+(2-\sqrt{3})^6}$ — рациональное. Запишите это число в виде несократимой дроби.

   Ответ: $\frac{97}{1351}$.

   Решение: Обозначим $a = 2+\sqrt{3}$, $b = 2-\sqrt{3}$. Заметим, что $a+b = 4$, $ab = 1$, следовательно, $a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 14$. Подобным же образом найдем $a^4+b^4 = (a^2+b^2)^2 - 2(ab)^2 = 194$ и $a^6+b^6 = (a^2+b^2)\cdot(a^4-a^2b^2+b^4) = 2702$. Сократив дробь $\frac{194}{2702}$, получим $\frac{97}{1351}$.

9. (8,9) Какова наибольшая возможная площадь четырехугольника $ABCD$, стороны которого равны $AB = 1$, $BC = 8$, $CD = 7$ и $DA = 4$?

   Ответ: 18.

   Решение: Заметим, что $1^2+8^2 = 7^2+4^2 = 65$. При зафиксированных длинах AB и BC площадь $\triangle ABC$ будет максимальна, если $\angle ABC = 90^\circ$. В этом случае тогда $AC = \sqrt{65}$, и, следовательно, тогда $\angle BCD = 90^\circ$ тоже и площадь $\triangle BCD$ тоже максимальна.

10. (8,9) Найдите наименьшее возможное значение $|2015m^5 - 2014n^4|$, если m и n — натуральные числа.

    Ответ: 0.

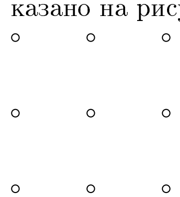
    Решение: Рассмотрим числа вида $m = 2014^a\cdot 2015^b$ и $n = 2014^c\cdot 2015^d$. Тогда $|2015m^5 - 2014n^4| = |2014^{5a}\cdot 2015^{5b+1} - 2014^{4c+1}\cdot 2015^{4d}|$. Эта величина равна 0 в случае $5a = 4c+1$, $5b+1 = 4d$. Несложно подобрать такие числа, например, $a = c = 1$, $b = 3$, $d = 4$.

11. (9) Целые числа a, b и c таковы, что $a\cdot\left(1-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + b\cdot\left(1-\frac{\sqrt{7}}{2}\right) + c = 5$. Каково минимальное значение $|a+b+c|$ при этом условии?

    Ответ: 2.

    Решение: Если $a = 0$, то $b = 0$ и $c = 5$, следовательно, $|a+b+c| = 5$. Если $a \neq 0$, то рассмотрим квадратичную функцию $f(x) = ax^2+bx+c$. Заметим, что $f(x)-5$ имеет корни $1\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$. Следовательно, $f(x) = 5+k\cdot(4x^2-8x-3)$, $k\neq 0$, т.е. $|a+b+c| = |5-7k|$, Минимум, равный 2 достигается при $k = 1$.

12. (9) На плоскости расположено 9 точек в виде решетки 3×3, как показано на рисунке.

    а) Через все возможные пары точек провели прямые. Сколько различных прямых получилось? б) Сколько существует различных треугольников с вершинами в этих точках?

Ответ: a) 20; b) 76.

Решение: a) Пар точек будет $C_9^2 = 36$, но прямые совпадают, когда три точки лежат на одной прямой. Таких случаев 8= 3 горизонтали+3вертикали+2диагонали. Следовательно, отнимем $36 - 8 \times 2 = 20$.

b) Троек точек $C_9^3 = 84$, но не все образуют треугольник, т.е. надо отнять 8 троек, лежащих на одной прямой. 84-8=76.

13. (9) Решите неравенство $\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2-4x+3} + \sqrt{2x+3-x^2} \geqslant 2$.

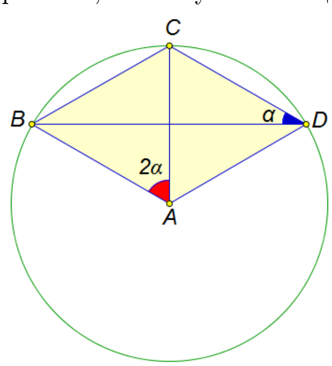
Ответ: $x \in \{-1, 1, 3\}$.

Решение: Найдем ОДЗ указанного неравенства. Она состоит из 3 точек: $\{-1, 1, 3\}$. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что все они подходят.

14. (9) В параллелограмме $ABCD$ угол $\angle BAC$ в два раза больше угла $\angle BDC$. Найдите площадь параллелограмма, если известно, что $AB = AC = 2$.

Ответ: $2\sqrt{3}$.

Решение: Указанный параллелограмм является ромбом с углом 60 градусов. Это можно доказать построив окружность с центром в точке A и радиуса 2. Тогда точки B, C, D будут лежать на этой окружности. Сторона ромба равна 2, поэтому его площадь $S(ABCD) = AB \cdot AD \cdot$



$\sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$.

Поскольку в опубликованное условие этой задачи вкралась опечатка — вместо $\angle BDC$ был указан $\angle BCD$, то корректное доказательство того, что указанная в задаче конструкция не существует, также принимается в качестве правильного решения.

15. (9) Найдите q, при котором $x^2+x+q=0$ имеет два различных действительных корня, удовлетворяющих соотношению $x_1^4 + 2x_1x_2^2 - x_2 = 19$.

Ответ: $q = -3$.

Решение: Если x корень, то $x^2 = -x - q$, следовательно $x^4 = x^2 + 2qx + q^2 = (2q-1)x + q^2 - q$. Тогда $x_1^4 + 2x_1x_2^2 - x_2 = (2q-1)x_1 + q^2 - q + 2qx_2 - x_2 = (2q-1)(x_1+x_2) + q^2 - q$. Воспользуемся теоремой Виета

$x_1 + x_2 = -1$, получим $q^2 - 3q + 1 = 19$. Решив, получим $q_1 = -3$, $q_2 = 6$, но при $q = 6$ исходное уравнение не имеет корней.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **3–1***

1. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу выехали два автобуса, которые встретились 2 февраля в $12:00$. Найдите дату и время начала движения автобусов, если их скорости на всем пути постоянные, и один из них прибыл 3 февраля в $4:00$ в пункт B, а другой прибыл 3 февраля в $13:00$ в пункт A.

2. Через точку, лежащую на оси цилиндра радиуса $\sqrt{3}$ и отстоящую от ближайшего к ней основания цилиндра на расстояние 1, проведена плоскость. Найдите объем меньшей части цилиндра, отсекаемой этой плоскостью, если угол между осью цилиндра и плоскостью равен 60°.

3. Найдите решения неравенства

$$\sqrt{\sin x + \frac{1}{2}} > 2\sin x$$

на отрезке $[-\frac{1}{2}; \frac{8}{3}]$.

4. Найдите произведение корней уравнения

$$\log_{5+\sqrt{15}}(x^2 - 2x - 2) = \log_{5-\sqrt{15}}(12 + 2x - x^2).$$

5. Найдите все значения a, при которых существует целое число n, удовлетворяющее уравнению $n^2 \cdot 3^a - 3^a - 16n = 9 \cdot 3^{-a} - 3^{2-a} \cdot n^2$.

март 2015 г.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **3–2***

1. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу выехали два автобуса, которые встретились 9 февраля в $12:00$. Найдите дату и время начала движения автобусов, если их скорости на всем пути постоянные, и один из них прибыл 9 февраля в $21:00$ в пункт B, а другой прибыл 10 февраля в $13:00$ в пункт A.

2. Через точку, лежащую на оси цилиндра радиуса $\sqrt{3}$ и отстоящую от ближайшего к ней основания цилиндра на расстояние 3, проведена плоскость. Найдите объем меньшей части цилиндра, отсекаемой этой плоскостью, если угол между осью цилиндра и плоскостью равен 30°.

3. Найдите решения неравенства

$$\sqrt{\cos x + \frac{1}{2}} > 2\cos x$$

на отрезке $[-2; \frac{16}{15}]$.

4. Найдите произведение корней уравнения

$$\log_{5+\sqrt{15}}(x^2 - 2x - 3) = \log_{5-\sqrt{15}}(13 - x^2 + 2x).$$

5. Найдите все значения a, при которых существует целое число n, удовлетворяющее уравнению $3 \cdot 2^a + 3 \cdot 2^{-a} = 16n + 3n^2 \cdot 2^a + 3n^2 \cdot 2^{-a}$.

март 2015 г.

*Ответы и решения к варианту **3–1***

1. Пусть t — время в пути автобусов до их встречи в точке C, тогда

$$\frac{t}{16} = \frac{S_{AC}}{S_{CB}} = \frac{25}{t} \Longleftrightarrow t^2 = 16 \cdot 25.$$

Значит $t = 20$.

Ответ: 1 февраля в $16:00$.

Ответ к варианту: *3–2*: 8 февраля в $21:00$.

2. Используя равносоставленность показываем, что искомый объем равен объему цилиндра радиуса $\sqrt{3}$ и высотой 1.

Ответ: 3π.

Ответ к варианту: *3–2*: 9π.

3. Положив $t = \sin x$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$, получаем

$$\sqrt{t + \frac{1}{2}} > 2t \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t < 0, \\ t + \frac{1}{2} \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} t \geqslant 0, \\ t + \frac{1}{2} \geqslant 4t^2 \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow -\frac{1}{2} \leqslant t < \frac{1}{2}.$$

Далее сравнения чисел $-\frac{\pi}{6} < -\frac{1}{2}$, $\frac{5\pi}{6} < \frac{8}{3}$.

Ответ: $[-\frac{1}{2}; \pi/6) \cup (\frac{5\pi}{6}; \frac{8}{3}]$.

Ответ к варианту: *3–2*: $[-2; -\frac{\pi}{3}) \cup (\frac{\pi}{3}; \frac{16}{15}]$.

4. Обозначая общее значение логарифмов через t, получаем

$$(5 + \sqrt{15})^t = x^2 - 2x - 2, \quad (5 - \sqrt{15})^t = -x^2 + 2x + 12.$$

Сложив эти равенства, получаем

$$(5 + \sqrt{15})^t + (5 - \sqrt{15})^t = 10.$$

Так как функция $(5 + \sqrt{15})^t + (5 - \sqrt{15})^t$ возрастает, то единственное решение $t = 1$. Откуда $x^2 - 2x - 2 = 5 + \sqrt{15}$.

Ответ: $-7 - \sqrt{15}$.

Ответ к варианту: *3–2*: $-8 - \sqrt{15}$.

5. Перепишем уравнение в виде $(n^2-1)(3^{a-1}+3^{1-a}) = \frac{16n}{3}$. Значения $n = \pm 1$ и $n = 0$ решением не являются. Т.к. $3^{a-1}+3^{1-a} \geqslant 2$, то необходимо $\frac{16n}{3n^2-3} \geqslant 2$ $\Leftrightarrow 3n^2 - 8n - 3 \leqslant 0$ (учитываем, что $|n| > 1$). $n \in \left[-\frac{1}{3}; 3\right]$. При $n = 2$ получаем $3^{a-1}+3^{1-a} = \frac{32}{9}$, откуда $a = 1+\log_3 \frac{16\pm 5\sqrt{7}}{9}$. При $n = 3$ получаем $3^{a-1} + 3^{1-a} = 2$, откуда $a = 1$.

Ответ: $a = 1$, $a = 1 + \log_3 \frac{16\pm 5\sqrt{7}}{9}$.

Решение второго варианта:
Перепишем уравнение в виде $(1 - n^2)(2^a + 2^{-a}) = \frac{16n}{3}$. Значения $n = \pm 1$ и $n = 0$ решением не являются. Т.к. $2^a + 2^{-a} \geqslant 2$, то необходимо $\frac{16n}{3-3n^2} \geqslant 2$ $\Leftrightarrow 3n^2 + 8n - 3 \leqslant 0$ (учитываем, что $|n| > 1$). $n \in \left[-3; \frac{1}{3}\right]$. При $n = -2$ получаем $2^a + 2^{-a} = \frac{32}{9}$, откуда $a = \log_2 \frac{16\pm 5\sqrt{7}}{9}$. При $n = 3$ получаем $2^a + 2^{-a} = 2$, откуда $a = 0$.

Ответ: $a = 0$, $a = \log_2 \frac{16\pm 5\sqrt{7}}{9}$.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **4–1***

1. В контейнере находятся изделия нескольких типов из пяти возможных: весом 1 кг, 2 кг, 3 кг, 5 кг и 10 кг. Суммарный вес изделий в контейнере равен 100 кг. Известно, что если выбрать из контейнера по одному изделию каждого из имеющихся в нем типов, то их суммарный вес будет равен 15 кг. Количество самых тяжелых из находящися в контейнере изделий на 5 больше, чем количество всех остальных изделий в нем. Определите, какие типы изделий и в каком количестве находятся в контейнере.

2. Решите уравнение

$$\left|\log_2 \frac{x}{2}\right|^3 + |\log_2 2x|^3 = 28.$$

3. Найдите наибольшее натуральное число не превосходящее 2015, такое что при умножении на 5 сумма его цифр (в десятичной записи) не меняется.

4. Окружность касается одной из сторон угла с вершиной A в точке B и пересекает вторую сторону в точках C и D, причем AD в три раза меньше AC. Косинус угла A равен $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

а. Найдите отношение BC к BD.

б. Найдите отношение радиуса окружности к BD.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2\sin x + \sin^2 y - \sin^2 x \cos^2 y = 1, \\ 2\cos^2 x + 4\sin x - \cos^3 y = 5. \end{cases}$$

март 2015 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **4–2***

1. В контейнере находятся изделия нескольких типов из пяти возможных: весом 1 кг, 3 кг, 5 кг, 7 кг и 10 кг. Суммарный вес изделий в контейнере равен 100 кг. Известно, что если выбрать из контейнера по одному изделию каждого из имеющихся в нем типов, то их суммарный вес будет равен 15 кг. Количество самых тяжелых из находящися в контейнере изделий на 8 больше, чем количество всех остальных изделий в нем. Определите, какие типы изделий и в каком количестве находятся в контейнере.

2. Решите уравнение

$$\left|\log_3 \frac{x}{9}\right|^3 + |\log_3 x|^3 = 28.$$

3. Найдите наибольшее натуральное число не превосходящее 2024, такое что при умножении на 5 сумма его цифр (в десятичной записи) не меняется.

4. Окружность касается одной из сторон угла с вершиной A в точке B и пересекает вторую сторону в точках C и D, причем AD в пять раз меньше AC. Косинус угла A равен $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

а. Найдите отношение BC к BD.

б. Найдите отношение радиуса окружности к BD.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2\cos x + \cos^2 y - \cos^2 x \sin^2 y = 1, \\ 4\cos x - 2\cos^2 x - \sin^3 y = 3. \end{cases}$$

март 2015 г.

Решения варианта 4-1

1. Из условия про 15 кг следует, что в контейненре могут находиться либо только изделия весом 5 и 10 кг, либо только изделия весом 2, 3 и 10 кг. Обозначим буквами x, y, z, u количество находящихся в контейнере изделий весом 2, 3, 5 и 10 кг соответственно.

В первом случае условия задачи задают систему $\begin{cases} u = z + 5, \\ 5z + 10u = 100, \end{cases}$ не имеющую решений в натуральных числах.

Во втором случае для натуральных x, y, u получаем систему уравнений

$$\begin{cases} u = x + y + 5, \\ 2x + 3y + 10u = 100, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = x + y + 5, \\ 12x = 50 - 13y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 2, \\ u = 9. \end{cases}$$

Ответ: по 2 изделия весом 2 и 3 кг, 9 изделий весом 10 кг.
Ответ к варианту: *4–2*: по 2 весом 3 и 5 кг, 12 весом 7 кг.

2. Пусть $\log_2 x = y$. Уравнение примет вид $|y-1|^3 + |y+1|^3 = 28$. При $y \geqslant 1$ и $y \leqslant -1$ функция в левой части уравнения монотонна, поэтому уравнение имеет не более одного решения, которое легко угадывается: $y = 2$ и $y = -2$. При $|y| < 1$ решений нет, т.к. каждое слагаемое в левой части меньше 8.

Ответ: 4 и 1/4.
Ответ к варианту: *4–2*: 27 и 1/3.

3. *Первое решение:* Известно, что $n \equiv$ сумма цифр числа $n(\mod 9)$, $5n \equiv$ сумма цифр числа $5n(\mod 9) =$ сумма цифр $n(\mod 9)$. Тогда $4n \equiv 0(\mod 9)$. Следовательно, n делится на 9 и $n \leqslant 2015$, т.е. $n = 2007$.

Второе решение: Поскольку $2015 \cdot 5 = 10075$, то сумма цифр чисел 2015 и 10075 не совпадает. Аналогично для чисел 2014, 2013, 2012, 2011, 2010, 2009, 2008. Поскольку $2007 \cdot 5 = 10035$, то число 2007 обладает свойством того, что сумма цифр чисел 2007 и $2007 \cdot 5$ совпадает.

Ответ: $n = 2007$.
Ответ к варианту: *4–2*: $n = 2016$.

4. Обозначим $AD = x$. Тогда $AC = 3x$ и, по свойству касательной и секущей, выпущенных из одной точки, $AB = x\sqrt{3}$.

Угол между касательной AB и хордой BD равен вписанному углу, опирающемуся на BD, т.е. $\angle ABD = \angle ACB$. Следовательно, $\triangle ADB \sim \triangle ABC$ и $\frac{BC}{BD} = \frac{AB}{AD} = \frac{x\sqrt{3}}{x} = \sqrt{3}$.

Проведем диаметр окружности BF. Треугольник BDF – прямоугольный, причем $\angle DFB = \angle DCB$ как опирающиеся на одну хорду. Проведем высоту DH в $\triangle ADB$. $\triangle BDH \sim \triangle FBD$ по острому углу и $\frac{BF}{BD} = \frac{BD}{DH}$. Таким образом, $\frac{2R}{BD} = \frac{BD}{DH}$. По теореме косинусов $BD = \sqrt{x^2 + 3x^2 - 2x^2\sqrt{3}\cos\hat{A}}$, из прямоугольного $\triangle AHD$ $DH = x\sin\hat{A}$. В итоге $\frac{R}{BD} = \frac{\sqrt{x^2+3x^2-2x^2\sqrt{3}\cos\hat{A}}}{2x\sin\hat{A}} = \sqrt{\frac{10}{13}}$.

Ответ: а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{\frac{10}{13}}$.

Ответ к варианту: *4–2*: а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{\frac{14}{11}}$.

5. Пусть $a = \sin x$, $b = \cos y$. Получаем $\begin{cases} a^2b^2 - 2a + b^2 = 0, \\ 2a^2 - 4a + b^3 + 3 = 0. \end{cases}$ Рассмотрим уравнения в системе как квадратные относительно a. В первом уравнении дискриминант равен $4 - 4b^2$, во втором равен $-8 - 8b^3$. Дискриминанты должны быть неотрицательными, поэтому единственным b, которое может являться решением системы, является $b = -1$. Тогда система имеет единственное решение $a = 1$, $b = -1$.

Ответ: $(\pi/2 + 2\pi n; \pi + 2\pi k)$, $n, k \in Z$.
Ответ к варианту: *4–2*: $(2\pi n; 3\pi/2 + 2\pi k)$, $n, k \in Z$.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

Вариант ***5–1***

1. Сравните $\sqrt{|8\sqrt{3}-16|}-\sqrt{8\sqrt{3}+16}$ и наименьший корень уравнения $4x^2+21x+17=0$.

2. Окружности с центрами в точках O_1 и O_2 пересекаются внешним образом в точках A и B (т.е точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от прямой AB). Известно,что $\angle AO_1B=\alpha$, $\angle AO_2B=\beta$, $O_1O_2=a$. Найдите радиусы окружностей.

3. Найдите корни уравнения $\log_2|\operatorname{tg}\pi x|+\log_4\dfrac{\cos\pi x}{2\cos\pi x+\sin\pi x}=0$, принадлежащие отрезку $\left[\frac{9}{4};3\right]$.

4. Для перевозки 60 тонн песка автомобилю потребовалось сделать некоторое количество рейсов, а для перевозки 120 тонн песка оказалось необходимо на 5 рейсов больше. На всех рейсах, кроме, может быть, последнего в каждой из этих двух перевозок, автомобиль загружается полностью. Определите все возможные значения грузоподъёмности этого автомобиля (то есть наибольшей массы груза, которую автомобиль может перевезти за один раз).

5. Решите уравнение $|x\sqrt{1-x^2}+x|=\sqrt{1+x^2}$.

март 2015 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

Вариант ***5–2***

1. Сравните $\sqrt{|12\sqrt{3}-31|}-\sqrt{12\sqrt{3}+31}$ и наименьший корень уравнения $4x^2+19x+15=0$.

2. Окружности с центрами в точках O_1 и O_2 пересекаются внутренним образом в точках A и B (т.е точки O_1 и O_2 лежат по одну сторону от прямой AB). Известно,что $\angle AO_1B=\alpha$, $\angle AO_2B=\beta$, $\beta>\alpha$ и $O_1O_2=a$. Найдите радиусы окружностей.

3. Найдите корни уравнения $\log_2|\operatorname{ctg}\pi x|+\log_4\dfrac{\sin\pi x}{2\sin\pi x+\cos\pi x}=0$, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7}{8};2\right]$.

4. Для перевозки 50 тонн песка автомобилю потребовалось сделать некоторое количество рейсов, а для перевозки 100 тонн песка оказалось необходимо на 5 рейсов больше. На всех рейсах, кроме, может быть, последнего в каждой из этих двух перевозок, автомобиль загружается полностью. Определите все возможные значения грузоподъёмности этого автомобиля (то есть наибольшей массы груза, которую автомобиль может перевезти за один раз).

5. Решите уравнение $|x\sqrt{4-x^2}+2x|=2\sqrt{4+x^2}$.

март 2015 г.

*Ответы к варианту **5***

1. Число больше корня.

$$\sqrt{|8\sqrt{3}-16|}-\sqrt{8\sqrt{3}+16}=\sqrt{(2\sqrt{3}-2)^2}-\sqrt{(2\sqrt{3}+2)^2}=-4.$$

$4x^2+21x+17=0 \Leftrightarrow x=-\frac{17}{4},\ x=-1.$

Следовательно, $\sqrt{|8\sqrt{3}-16|}-\sqrt{8\sqrt{3}+16}$ больше.

Ответ: Число больше корня.

Ответ к варианту: *5–2*: Число меньше корня.

2. На радиусы окружностей R_1 и R_2 получается система уравнений

$$\begin{cases} R_1\sin\dfrac{\alpha}{2}=R_2\sin\dfrac{\beta}{2} \quad \text{(теорема косинусов)} \\ R_1\cos\dfrac{\alpha}{2}+R_2\cos\dfrac{\beta}{2}=a \quad \text{(соотношения в прямоугольных треугольниках).} \end{cases}$$

Ответ: $R_1=\dfrac{a\sin\frac{\beta}{2}}{\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})}$, $R_2=\dfrac{a\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})}$. **Пример.** $a=5$, $\alpha=90^\circ$, $\beta=60^\circ$. $R_1=\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$, $R_2=\frac{10}{\sqrt{3}+1}$.

Ответы к другим вариантам: *5–2*: $R_1=\dfrac{a\sin\frac{\beta}{2}}{\sin(\frac{\beta-\alpha}{2})}$, $R_2=\dfrac{a\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin(\frac{\beta-\alpha}{2})}$.

Пример. $a=5$, $\alpha=60^\circ$, $\beta=90^\circ$. $R_1=\frac{10}{\sqrt{3}-1}$, $R_2=\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$.

3. $\log_2|\operatorname{tg}\pi x|+\log_4\dfrac{\cos\pi x}{2\cos\pi x+\sin\pi x}=0 \Leftrightarrow \log_2\frac{\sin^2\pi x}{\cos\pi x(2\cos\pi x+\sin\pi x)}=0 \Leftrightarrow$

$$\frac{\sin^2\pi x}{\cos\pi x(2\cos\pi x+\sin\pi x)}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2\pi x=\cos\pi x(2\cos\pi x+\sin\pi x) \\ \cos\pi x(2\cos\pi x+\sin\pi x)\neq 0, \quad \sin\pi x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\pi x=-1, \\ \operatorname{tg}\pi x=2, \end{array}\right. \\ \cos\pi x(2\cos\pi x+\sin\pi x)\neq 0, \quad \sin\pi x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{4}+n,\ x=\frac{\operatorname{arctg}2}{\pi}+k.$$

Т.к. $\frac{\pi}{4}<\operatorname{arctg}2<\frac{\pi}{2}$, то $x=\frac{11}{4}$, $\frac{\operatorname{arctg}2}{\pi}+2$.

Ответ: $\frac{11}{4}$; $\frac{\operatorname{arctg}2}{\pi}+2$.

Ответ к варианту: *5–2*: $\frac{7}{4}$; $\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}{\pi}+1$.

4. Пусть грузоподъёмность автомобиля равна a тонн, а для перевозки 60 тонн песка потребовалось n рейсов. Тогда возможны две ситуации:
а) $n-1$ полных машин и еще не более половины машины: тогда для перевозки 120 тонн нужно будет $2(n-1)+1=2n-1$ рейсов. По условию $2n-1-n=5$, а значит, $n=6$. Ситуация реализуется, если $5a<60$ и $5,5a\geqslant 60$, то есть $\left[10\frac{10}{11};12\right)$.
б) $n-1$ полных машин и еще больше половины машины: тогда для перевозки 120 тонн нужно $2(n-1)+2=2n$ рейсов. По условию $2n-n=5$, а значит $n=5$. Тогда: $4,5a<60$ и $5a\geqslant 60$, то есть $\left[12;13\frac{1}{3}\right)$.

Ответ: $\left[10\frac{10}{11};13\frac{1}{3}\right)$ тонн.

Ответ к варианту: *5–2*: $\left[9\frac{1}{11};11\frac{1}{9}\right)$ тонн.

5. Поскольку ввыражение слева и справа — чётные функции, то достаточно рассмотреть случай $x\geqslant 0$.

Первое решение: При $x\in[0;1]$ все преобразования равносильны. При $x\notin[0;1]$ решений нет.

$$x\sqrt{1-x^2}+x=\sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow x\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1+x^2}-x \Leftrightarrow$$
$$x^2-x^4=1+2x^2-2x\sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow 2x\sqrt{1+x^2}=x^4+x^2+1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2(1+x^2)=(x^2(x^2+1)+1)^2 \Leftrightarrow (x^2(x^2+1)-1)^2=0 \Leftrightarrow x^4+x^2-1=0.$$

Т.е. $x=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$. Учитывая чётность всех выражений в исходном уравнении $x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Второе решение: используем неравенство Коши–Буняковского в $\mathbb{R}^2$ на векторах: $(\sqrt{1-x^2},x)$ и $\pm(x,1)$. Откуда $\pm(x\sqrt{1-x^2}+x)\leqslant 1\cdot\sqrt{1+x^2}$. Равенство достигается, если вектора пропорциональны: $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\frac{x}{1} \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}=x^2 \Leftrightarrow x^2=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Ответ: $\pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Ответ к варианту: *5–2*: $\pm\sqrt{2(\sqrt{5}-1)}$.

март 2015 г.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **6–1***

1. Решите уравнение

$$(1+x+x^2)(1+x+x^2+\dots+x^{10})=(1+x+x^2+\dots+x^6)^2.$$

2. Две арифметические прогрессии содержат по 2015 членов каждая. Отношение последнего члена первой прогрессии к первому члену второй равно отношению последнего члена второй прогрессии к первому члену первой и равно 4. Отношение суммы всех членов первой прогрессии к сумме всех членов второй равно 2. Найдите отношение разностей этих прогрессий и приведите пример таких прогрессий.

3. Решите систему

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2\pi(x-y)+\operatorname{ctg}^2\pi(y-x)=\sqrt{\frac{2x}{x^2+1}}+1,\\ x^2+y^2\leqslant 10. \end{cases}$$

4. Плоскость проходит через точку K, лежащую на ребре SA пирамиды $SABC$, делит биссектрису SD грани SAB и медиану SE грани SAC пополам. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды, если $SK:KA=SA:SB=2$?

5. Найдите все значения a при каждом из которых уравнение

$$25^{-|x-a|}\log_{\sqrt[5]{7}}(x^2-2x+3)+5^{-x^2+2x}\log_{1/7}(2|x-a|+2)=0$$

имеет ровно три различных решения.

март 2015 г.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **6–2***

1. Решите уравнение

$$(1-x+x^2)(1-x+x^2-\dots+x^{10})=(1-x+x^2-\dots+x^6)^2.$$

2. Две арифметические прогрессии содержат по 2015 членов каждая. Отношение последнего члена первой прогрессии к первому члену второй равно отношению последнего члена второй прогрессии к первому члену первой и равно 5. Отношение суммы всех членов первой прогрессии к сумме всех членов второй равно 2. Найдите отношение разностей этих прогрессий и приведите пример таких прогрессий.

3. Решите систему

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2\pi(2x-y)+\frac{1}{\sin^2\pi(y-2x)}=\sqrt{\frac{2x}{x^2+1}}+2,\\ x^2+y^2\leqslant 10. \end{cases}$$

4. Плоскость проходит через точку K, лежащую на ребре SA пирамиды $SABC$, делит медианы SD и SE граней SAB и SBC пополам. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды, если $SK:KA=2$?

5. Найдите все значения a при каждом из которых уравнение

$$9^{-|x-a|}\log_{\sqrt[3]{5}}(x^2+2x+3)+3^{-x^2-2x}\log_{1/5}(2|x-a|+2)=0$$

имеет ровно три различных решения.

март 2015 г.

Решения варианта 6-1

1. Так как $x = 1$ не является корнем исходного уравнения, то

$$(1-x^3)(1-x^{11}) = (1-x^7)^2 \Longleftrightarrow x^3(1-x^4)^2.$$

Ответ: -1; 0.
Ответ к варианту: *6–1*: 0; 1.

2. Пусть первая прогрессия: a_1, a_2, …, a_{2015};а вторая: b_1, b_2, …, b_{2015}. Знаменатель первой прогрессии обозначим d второй — δ. Тогда

$$\begin{cases} a_1 + 2014d = 4b_1, \\ b_1 + 2014\delta = 4a_1, \\ 2a_1 + 2014d = 4b_1 + 2\cdot 2014\delta. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2014d = 4b_1 - a_1, \\ 2014\delta = 4a_1 - b_1, \\ 7a_1 = 2b_1. \end{cases}$$

Откуда $\frac{d}{\delta} = \frac{4b_1 - a_1}{4a_1 - b_1} = 26$.

Ответ: 26. Ответ к варианту: *6–2*: 7.

3. Оценивая каждую из частей неравенства, получаем

$$2 \leqslant \operatorname{tg}^2 \pi(x-y) + \operatorname{ctg}^2 \pi(y-x) = \sqrt{\frac{2x}{x^2+1}} + 1 \leqslant 2,$$

Равенство возможно только при $x = 1$, $\operatorname{tg}^2 \pi(y-1) = 1$.

Ответ: $(1; (2n+5)/4)$, $n = -8; -7; -6, \ldots, -1, 0, 1, 2, 3$. Ответы к другим вариантам: *7–2*: $(1; (2n+9)/4)$, $n = -10; -9; -8, \ldots, -1, 0, 1$.

4. Пусть L и K — точки, в которых плоскость пересекает ребра SB и SC, соответственно. Тогда $\frac{V_{SKLM}}{V_{SABC}} = \frac{SK\cdot SL\cdot SM}{SA\cdot SB\cdot SC}$. В гранях SAB и SAC, решая простые планиметрические задачи, находим $SL : SB = 4 : 9$, $SM : SC = 2 : 5$. Значит

$$\frac{V_{SKLM}}{V_{SABC}} = \frac{SK\cdot SL\cdot SM}{SA\cdot SB\cdot SC} = \frac{2\cdot 4\cdot 2}{3\cdot 9\cdot 5} = \frac{16}{135}.$$

Ответ: 16/119. Ответ к варианту: *6–2*: 8/37. *Плоскость сечения (во втором варианте) делит SB в отношении $2 : 3$, а SC в отношении $2 : 1$, считая от S.*

5. Перепишем уравнение в виде

$$5^{(x-1)^2}\log_7((x-1)^2+2) = 5^{2|x-a|}\log_7(2|x-a|+2).$$

Пусть $f(t) = 5^t\log_7(t+2)$. Эта функция возрастает. Поэтому

$$f((x-1)^2) = f(2|x-a|) \Longleftrightarrow (x-1)^2 = 2|x-a|.$$

Три решения будут в случае касания для $a = 1/2$, $a = 3/2$ и в случае когда $a = 1$, поскольку совпадают вершины параболы $y = (x-1)^2$ и кривой $y = |x-1|$.

Ответ: $a = 1/2$; 1; 3/2.
Ответ к варианту: *6–2*: $a = -3/2$; -1; $-1/2$.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

Вариант ***7–1***

1. Из четырёх бегунов: Антона, Бориса, Виктора и Григория, – второе место занял самый старший. При этом Антон пробежал дистанцию быстрее, чем Виктор; Григорий – быстрее, чем Борис и Виктор. Известно также, что Борис старше Антона, а Виктор старше Григория. В каком порядке финишировали спортсмены?

2. На доске написаны числа $1, 2, \ldots, 2015$. Над ними последовательно проделывают 2014 операций, причем n-я по счету операция состоит в следующем: произвольные два числа a и b (из записанных на доске) стираются и дописывается одно число, равное $\frac{ab}{n}$. Что останется на доске в конце?

3. В четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 2$, $BC = 4$, $CD = 5$ вписали окружность и вокруг него описали окружность. Найдите площадь четырёхугольника.

4. Решите уравнение:

$$\frac{\cos 4x - 6\cos^2 2x + 8\cos^2 x}{\sqrt{6x - x^2 - 5}} = 0.$$

5. При каждом значении a решите уравнение

$$|x-1|+|x+1|+|x-2|+|x+2|+|x-3|+|x+3|+\cdots+|x-2015|+|x+2015|+$$
$$+2x^2+2a^2+4030^2-8060x-8060a=4030x.$$

март 2015 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

Вариант ***7–2***

1. Из четырёх лыжников: Андрея, Бориса, Валерия и Геннадия, — второе место занял самый младший. При этом Геннадий финишировал раньше, чем Борис; Андрей — раньше, чем Борис и Валерий. Известно также, что Валерий младше Геннадия, а Борис младше Андрея. В каком порядке финишировали спортсмены?

2. На доске написаны числа $1, 2, \ldots, 2014$. Над ними последовательно проделывают 2013 операций, причем n-я по счету операция состоит в следующем: произвольные два числа a и b (из записанных на доске) стираются и дописывается одно число, равное $\frac{ab}{n}$. Что останется на доске в конце?

3. Вокруг четырёхугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 3$, $BC = 2$, $CD = 5$ описали окружность и в четырёхугольник вписали окружность. Найдите площадь четырёхугольника.

4. Решите уравнение:

$$\frac{\cos 4x - 4\cos^2 2x + 6\cos^2 x}{\sqrt{4x - x^2 + 5}} = 0.$$

5. При каждом значении c решите уравнение

$$|x-1|+|x+1|+|x-2|+|x+2|+|x-3|+|x+3|+\cdots+|x-2014|+|x+2014|+$$
$$+2x^2+2c^2+4028^2-8056x-8056c=4028x.$$

март 2015 г.

Решения варианта 7-1

1. Самым старшим может быть или Борис, или Виктор. Но Виктор не мог занять второе место, так как он уступил и Антону, и Григорию. Поэтому Борис — второй. Значит, Григорий — первый, Антон — третий, а Виктор — четвертый.

Ответ: Григорий, Борис, Антон, Виктор.
Ответ к варианту: *7–2*: Андрей, Валерий, Геннадий, Борис.

2. Произведение всех чисел на доске, первоначально равное 2015!, делится последовательно на 1, 2, 3, …, 2014. После 2014-ти операций останется одно число, равное $\frac{2015!}{2014!} = 2015$.

Ответ: 2015. Ответ к варианту: *7–2*: 2014.

3. Так как можно вписать окружность, то $DA = 2 + 5 - 4 = 3$. Далее можно по теореме косинусов найти диагонали и углы. Проще поступить иначе: так как четырехугольник вписанный, то $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$. Но так как он описанный, то $p = a + c = b + d$. Отсюда получается $S = \sqrt{abcd} = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$.

Ответ: $2\sqrt{30}$. Ответ к варианту: *7–2*: $6\sqrt{5}$.

4. Вначале решаем уравнение:

$$\begin{aligned}
&\cos 4x - 6\cos^2 2x + 8\cos^2 x = 0 \iff \\
&2\cos^2 2x - 1 - 6\cos^2 2x + 4(1 + \cos 2x) = 0 \iff \\
&4\cos^2 2x - 4\cos 2x - 3 = 0 \iff \\
&\cos 2x = -1/2 \iff \\
&x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Ограничения, связанные со знаменателем: $x \in (1; 5)$. Так как $1 < \frac{\pi}{3}$, $5 > \frac{4\pi}{3}$, то $x = \pi/3$; $2\pi/3$; $4\pi/3$.

Ответ: $\pi/3$; $2\pi/3$; $4\pi/3$. Ответ к варианту: *7–2*: $\pi/3$; $2\pi/3$; $4\pi/3$.

5. *Решение.* Можно перегруппировать следующим образом:

$$(|x-1| + |x+1| + |x-2| + |x+2| + \dots + |x-2015| + |x+2015| - 4030x) + \\ + (x-a)^2 + (x-4030+a)^2 = 0.$$

Первое выражение в скобках неотрицательно, причём обращается в ноль тогда и только тогда, если $x \geqslant 2015$. Поэтому исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x \geqslant 2015 \\ x = a, \\ x - 4030 + a = 0. \end{cases}$$

Откуда, если $a = 2015$, то $x = 2015$; если $a \neq 2015$, то решений нет.

Ответ: Если $a = 2015$, то $x = 2015$; если $a \neq 2015$, то решений нет.

Ответ к варианту: *7–2*: Если $c = 2014$, то $x = 2014$; если $c \neq 2014$, то решений нет, $\square$