

**ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ  
«ПОКОРИ ВОРОБЬЁВЫ ГОРЫ!»**

решения задач заочного тура по МАТЕМАТИКЕ  
2014/2015 учебный год

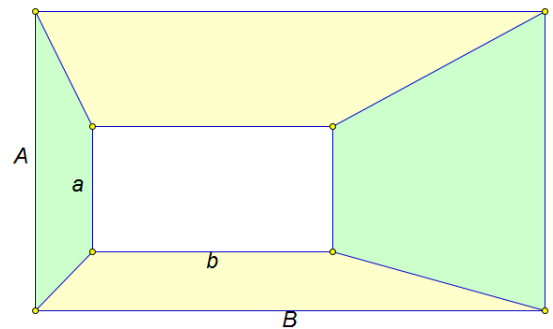
**5–7 классы.**

1. Некоторое трехзначное число сложили с числом, записываемым теми же цифрами, но в обратном порядке, и получили 1777. Какие числа складывали?

**Ответ:** 839 и 938.

**Решение:** Пусть число равно  $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ , тогда  $\overline{abc} + \overline{cba} = 101a + 20b + 101c = 1777$ . Сумма  $a + c$  должна оканчиваться на 7, т.е.  $a + c = 7$  или  $a + c = 17$ . Первый случай невозможен, поскольку тогда  $101a + 20b + 101c \leq 7 \cdot 101 + 9 \cdot 20 = 777 + 180 < 1777$ . Следовательно  $a + c = 17$ , что возможно только если  $a = 8, c = 9$  или наоборот. Подставляя в равенство, получи  $707 + 20b = 1777$ , откуда  $b = 3$ .

2. Внутри большого прямоугольника размера  $A \times B$  расположен малень-



кий прямоугольник размера  $a \times b$  (см. рис.)

Найдите разность между суммарной площадью желтых и суммарной площадью зеленых четырехугольников, если известно, что  $A = 20$ ,  $B = 30$ ,  $a = 4$ ,  $b = 7$ .

**Ответ:** 20.

**Решение:** см. зад для 8-9.

3. Пункты  $A, B, C$  расположены последовательно, причем расстояние  $AB$  равно 3 км, а расстояние  $BC$  равно 4 км. Из пункта  $A$  выехал велосипедист и поехал в пункт  $C$ . Одновременно с ним из пункта  $B$

вышел пешеход и направился в пункт  $A$ . Известно, что пешеход и велосипедист пришли в пункты  $A$  и  $C$  одновременно. Найдите, на каком расстоянии от пункта  $A$  они встретились.

**Ответ:** 2,1 км.

**Решение:** Скорости велосипедиста и пешехода относятся как  $7 : 3$ , точка их встречи делит  $AB$  в таком же отношении.

4. Некоторое 4-значное число является точным квадратом. Если убрать первую цифру слева, то оно станет точным кубом, а если убрать 2 первые цифры, то оно станет четвертой степенью целого числа. Найдите это число.

**Ответ:** 9216.

**Решение:** Только 16 и 81 являются двузначными четвертыми степенями. Но 81 не подходит, т.к. никакой трехзначный куб не оканчивается на 81 ( $5^3 = 125$ ,  $7^3 = 343$ ,  $9^3 = 729$ ). А на 16 оканчивается  $6^3 = 216$ . Далее ищем точный квадрат, который оканчивается на 216.

5. Сколько натуральных чисел от 1 до 2015 включительно имеют сумму цифр, кратную 5?

**Ответ:** 402.

**Решение:** Заметим, что среди десяти чисел вида  $\overline{a0}, \dots, \overline{a9}$  ровно два числа обладают суммой цифр кратной пяти. Таким образом среди чисел от 10 до 2009 ровно 200 таких десятков и, значит, 400 таких чисел. Учитывая также числа 5 и 2012, получаем 402 таких числа.

6. В ролевой игре «World of MSU» имеется три класса: воин, маг, целитель. Каждый игрок может управлять персонажем некоторого класса (одиночный класс) или персонажем, совмещающим способности двух классов (двойной класс), например, маг-целитель. Партия из 32 игроков штурмует «Цитадель зла». Известно, что целителей (т.е. всех, имеющих способности целителей) в два раза больше магов и в  $k$  раз меньше, чем воинов ( $k$  — целое число, большее двух). Сколько игроков имеют одиночный класс, если известно, что что игроков, имеющих двойной класс на 2 больше, чем целителей?

**Ответ:** 26.

**Решение:** Пусть  $x$  — количество магов, тогда целителей  $2x$ , а воинов —  $2kx$ . Их суммарное количество больше 32, поскольку некоторые игроки совмещают два класса. Очевидно количество игроков, совмещающих два класса равно  $x + 2x + 2kx - 32$ . Тогда целителей будет  $x + 2x + 2kx - 34$ , откуда получаем уравнение:  $x + 2x + 2kx - 34 = 2x$ . Преобразовав, получим  $x(2k + 1) = 34$ . Таким образом  $2k + 1$  — делитель 34, следовательно,  $k = 8$  и  $x = 2$ . Тогда целителей — 4, игроков двойных классов — 6, а все остальные  $32 - 6 = 26$  имеют одиночный класс.

7. Числа  $1, 2, \dots, 2016$  разбили на пары, при этом оказалось, что произведение чисел в каждой паре не превосходит некоторого натурального  $N$ . При каком наименьшем  $N$  это возможно?

**Ответ:**  $1017072 = 1008 \times 1009$ .

**Решение:** Если рассмотреть числа  $1008, 1009, \dots, 2016$ , то какие-то два должны попасть в одну пару. Значит  $N$  не может быть меньше  $1008 \cdot 1009$ . Покажем, что при  $N = 1008 \cdot 1009$  такое разбиение возможно. Разобьем на пары:  $(1, 2016), (2, 2016), \dots, (1008, 1009)$ . Несложно показать, что для этого разбиения выполняется условие задачи.