ОЛИМПИАДА "ПОКОРИ ВОРОБЬЁВЫ ГОРЫ! 2014-2015

Предварительный этап

10-11 классы

1 Тестовая часть (5 задач)

1.1 Иррациональное неравенство

1-1. Решите неравенство

$$\frac{9-2\sqrt{1-x}}{10-\sqrt{x^2-4x+4}} \geqslant 1.$$

В ответе укажите сумму всех целочисленных значений x, удовлетворяющих данному неравенству.

Ответ: -24.

1-2. Решите неравенство

$$\frac{9-2\sqrt{2-x}}{11-\sqrt{x^2-8x+16}} \geqslant 1.$$

В ответе укажите сумму всех целочисленных значений x, удовлетворяющих данному неравенству.

Ответ: -18.

1-3. Решите неравенство

$$\frac{x+7-3\sqrt{1-x}}{5-\sqrt{x^2-4x+4}} \geqslant 2.$$

В ответе укажите сумму всех целочисленных значений x, удовлетворяющих данному неравенству.

Ответ: -29.

1-4. Решите неравенство

$$\frac{x+10-3\sqrt{-x-2}}{5-\sqrt{x^2+2x+1}} \geqslant 2.$$

В ответе укажите сумму всех целочисленных значений x, удовлетворяющих данному неравенству.

Ответ: -47.

1-5. Решите неравенство

$$\frac{x+3-4\sqrt{-x-1}}{3-\sqrt{x^2-2x+1}} \geqslant 2.$$

В ответе укажите сумму всех целочисленных значений x, удовлетворяющих данному неравенству.

Ответ: -151.

1-6. Решите неравенство

$$\frac{2x-1-4\sqrt{2-x}}{2-\sqrt{x^2-6x+9}} \geqslant 3.$$

В ответе укажите сумму всех целочисленных значений x, удовлетворяющих данному неравенству.

Ответ: -103.

1-7. Решите неравенство

$$\frac{x+7-\sqrt{1-x}}{5-\sqrt{x^2-4x+4}} \geqslant 2.$$

В ответе укажите сумму всех целочисленных значений x, удовлетворяющих данному неравенству.

Ответ: -2.

1-8. Решите неравенство

$$\frac{4-\sqrt{-x-2}}{7-\sqrt{x^2-2x+1}} \geqslant 1.$$

В ответе укажите сумму всех целочисленных значений x, удовлетворяющих данному неравенству.

Ответ: -14.

1-9. Решите неравенство

$$\frac{2x+5-\sqrt{2-x}}{10-\sqrt{x^2-6x+9}} \geqslant 1.$$

В ответе укажите сумму всех целочисленных значений x, удовлетворяющих данному неравенству и не превосходящих по абсолютной величине 15.

Ответ: -90.

1-10. Решите неравенство

$$\frac{9+\sqrt{-3-x}}{8-\sqrt{x^2+8x+16}} \leqslant 1.$$

В ответе укажите сумму всех целочисленных значений x, удовлетворяющих данному неравенству и не превосходящих по абсолютной величине 15.

Ответ: -45.

1-11. Решите неравенство

$$\frac{x-1+2\sqrt{3-x}}{2-\sqrt{x^2-8x+16}} \leqslant 2.$$

В ответе укажите сумму всех целочисленных значений x, удовлетворяющих данному неравенству и не превосходящих по абсолютной величине 15.

Ответ: -116.

1-12. Решите неравенство

$$\frac{2x+5+2\sqrt{-1-x}}{3-\sqrt{x^2-2x+1}} \leqslant 3.$$

В ответе укажите сумму всех целочисленных значений x, удовлетворяющих данному неравенству и не превосходящих по абсолютной величине 15.

Ответ: -118.

1.2 Тригонометрия

2-1. Решите уравнение

$$3\sin 2x + 2\cos 2x = 3.$$

В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку A, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

2-1. $A = [\pi/6; \pi]$. **Ответ:** 0.79.
2-2. $A = [\pi/4; \pi]$. **Ответ:** 0.79.
2-3. $A = [-5\pi/6; 0]$. **Ответ:** -2.36.
2-4. $A = [-5\pi/6; -\pi/2]$. **Ответ:** -2.36.
2-5. $A = [7\pi/6; 2\pi]$. **Ответ:** 3.93.
2-6. $A = [5\pi/4; 2\pi]$. **Ответ:** 3.93.
2-7. $A = [-7\pi/4; -\pi]$. **Ответ:** -5.50.
2-8. $A = [-11\pi/6; -3\pi/2]$. **Ответ:** -5.50.

2-1'. Решите уравнение

$$2\cos 2x - 3\sin 2x = 3.$$

В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку A, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

2-1. $A = [-\pi; -\pi/6]$. **Ответ:** -0.79.
2-2. $A = [-\pi; -\pi/4]$. **Ответ:** -0.79.
2-3. $A = [0; 5\pi/6]$. **Ответ:** 2.36.
2-4. $A = [\pi/2; 5\pi/6]$. **Ответ:** 2.36.
2-5. $A = [-2\pi; -7\pi/6]$. **Ответ:** -3.93.
2-6. $A = [-2\pi; -5\pi/4]$. **Ответ:** -3.93.
2-7. $A = [\pi; 7\pi/4]$. **Ответ:** 5.50.
2-8. $A = [3\pi/2; 11\pi/6]$. **Ответ:** 5.50.

2-2. Решите уравнение

$$\sin x \cdot \sin 3x + \sin 4x \cdot \sin 8x = 0.$$

В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку A, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

2-2-1. $A = [\frac{\pi(16m+1)}{16}; \frac{(6m+1)\pi}{6}]$, $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.
1. $m = 1$. **Ответ:** 3.59.
2. $m = 2$. **Ответ:** 6.73.
3. $m = 3$. **Ответ:** 9.87.
4. $m = 4$. **Ответ:** 13.02.
5. $m = 5$. **Ответ:** 16.15.
6. $m = 6$. **Ответ:** 19.30.
7. $m = 7$. **Ответ:** 22.44.
8. $m = 8$. **Ответ:** 25.58.

2-2-2. $A = [\frac{(3+10m)\pi}{10}; \frac{(21+50m)\pi}{50}]$, $m = 1, 2, 3, 4$.
1. $m = 1$. **Ответ:** 4.40.
2. $m = 2$. **Ответ:** 7.54.
3. $m = 3$. **Ответ:** 10.68.

4. $m = 4$. **Ответ:** 13.82.

2-3. Решите уравнение
$$\cos 2x + \cos 6x + 2\sin^2 x = 1.$$
В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку A, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

2-3. $A = [\frac{m\pi}{6}; \frac{(m+1)\pi}{6}]$, $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.
1. $m = 1$. **Ответ:** 0.79.
2. $m = 2$. **Ответ:** 1.31.
3. $m = 3$. **Ответ:** 1.83.
4. $m = 4$. **Ответ:** 2.36.
5. $m = 5$. **Ответ:** 2.88.
6. $m = 6$. **Ответ:** 3.40.
7. $m = 7$. **Ответ:** 3.93.
8. $m = 8$. **Ответ:** 4.45.

2-4. Решите уравнение
$$\sin 3x + \sin x = 4\sin^3 x.$$
В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку A, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

2-4. $A = [\frac{(1+12m)\pi}{6}; \frac{(4m+1)\pi}{2}]$, $m = \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6$.
1. $m = 2$. **Ответ:** 13.35.
2. $m = -2$. **Ответ:** -11.78.
3. $m = 3$. **Ответ:** 19.63.
4. $m = -3$. **Ответ:** -18.06.
5. $m = 4$. **Ответ:** 25.92.
6. $m = -4$. **Ответ:** -24.35.
7. $m = 5$. **Ответ:** 32.20.
8. $m = -5$. **Ответ:** -30.63.
9. $m = 6$. **Ответ:** 38.48.
10. $m = -6$. **Ответ:** -36.91.

2-5. Решите уравнение
$$5\sin x + 2\cos 2x = 3.$$
В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку A, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

2-5. $A = [2\pi m; \pi(2m+1)]$, $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$.
1. $m = 1$. **Ответ:** 23.56.
2. $m = -1$. **Ответ:** -14.14.
3. $m = 2$. **Ответ:** 42.41.
4. $m = -2$. **Ответ:** -32.99.
5. $m = 3$. **Ответ:** 61.26.
6. $m = -3$. **Ответ:** -51.84.
7. $m = 4$. **Ответ:** 80.11.
8. $m = -4$. **Ответ:** -70.69.

2-6. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}(x+\pi/4)+\operatorname{tg}(x-\pi/4)=\operatorname{tg} x.$$

В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку A, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

2-6. $A=[\frac{(1+3m)\pi}{3};\frac{(8m+9)\pi}{8}]$, $m=\pm2,\pm3,\pm4,\pm5$.
1. $m=2$. **Ответ:** 9.42.
2. $m=-2$. **Ответ:** -3.14.
3. $m=3$. **Ответ:** 12.57.
4. $m=-3$. **Ответ:** -6.28.
5. $m=4$. **Ответ:** 15.71.
6. $m=-4$. **Ответ:** -9.42.
7. $m=5$. **Ответ:** 18.85.
8. $m=-5$. **Ответ:** -12.57.

2-7. Решите уравнение

$$\cos x\cdot\cos 3x=\frac{1}{8}.$$

В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку A, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

2-7. $A=[\frac{(2m-1)\pi}{2};\frac{(2m+1)\pi}{2}]$, $m=\pm2,\pm3,\pm4,\pm5$.
1. $m=2$. **Ответ:** 12.57.
2. $m=-2$. **Ответ:** -12.57.
3. $m=3$. **Ответ:** 18.85.
4. $m=-3$. **Ответ:** -18.85.
5. $m=4$. **Ответ:** 25.13.
6. $m=-4$. **Ответ:** -25.13.
7. $m=5$. **Ответ:** 31.42.
8. $m=-5$. **Ответ:** -31.42.

2-8. Решите уравнение

$$\operatorname{ctg} 2x=\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}.$$

В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку A, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

2-8. $A=[\frac{(4m+1)\pi}{2};(2m+1)\pi]$, $m=\pm2,\pm3,\pm4,\pm5,\pm6$.
1. $m=2$. **Ответ:** 14.92.
2. $m=-2$. **Ответ:** -10.21.
3. $m=3$. **Ответ:** 21.21.
4. $m=-3$. **Ответ:** -16.49.
5. $m=4$. **Ответ:** 27.49.
6. $m=-4$. **Ответ:** -22.78.
7. $m=5$. **Ответ:** 33.77.
8. $m=-5$. **Ответ:** -29.06.
9. $m=6$. **Ответ:** 40.06.
10. $m=-6$. **Ответ:** -35.34.

2-9. Решите уравнение

$$\cos 3x+\sin x\sin 2x=0.$$

В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку A, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

2-9. $A = [\frac{(12m+1)\pi}{6}; \frac{2(3m+1)\pi}{3}]$, $m = \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6$.
1. $m = 2$. **Ответ:** 27.49.
2. $m = -2$. **Ответ:** -22.78.
3. $m = 3$. **Ответ:** 40.06.
4. $m = -3$. **Ответ:** -35.34.
5. $m = 4$. **Ответ:** 52.62.
6. $m = -4$. **Ответ:** -47.91.
7. $m = 5$. **Ответ:** 61.19.
8. $m = -5$. **Ответ:** -60.48.
9. $m = 6$. **Ответ:** 77.75.
10. $m = -6$. **Ответ:** -73.04.

2-10. Решите уравнение

$$\sin 9x = 2\sin 3x.$$

В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих интервалу A, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

2-10. $A = (2\pi m; \frac{(8m+1)\pi}{4})$, $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$.
1. $m = 1$. **Ответ:** 6.46.
2. $m = -1$. **Ответ:** -6.11.
3. $m = 2$. **Ответ:** 12.74.
4. $m = -2$. **Ответ:** -12.39.
5. $m = 3$. **Ответ:** 19.02.
6. $m = -3$. **Ответ:** -18.68.
7. $m = 4$. **Ответ:** 25.31.
8. $m = -4$. **Ответ:** -24.96.

2-11. Решите уравнение

$$4\sin 4x\cos 2x + 5\cos 3x = 5\cos 5x.$$

В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку A, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

2-11. $A = [2\pi m; (2m+1)\pi]$, $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$.
1. $m = 1$. **Ответ:** 39.27.
2. $m = -1$. **Ответ:** -23.56.
3. $m = 2$. **Ответ:** 70.69.
4. $m = -2$. **Ответ:** -54.98.
5. $m = 3$. **Ответ:** 102.10.
6. $m = -3$. **Ответ:** -86.39.
7. $m = 4$. **Ответ:** 133.52.
8. $m = -4$. **Ответ:** -117.81.

2-12. Решите уравнение

$$2\sin^2 x + \sin^2 2x = \frac{5}{4} - 2\cos 2x.$$

В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку A, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

2-12. $A = [2\pi m; (2m+1)\pi]$, $m = \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6$.
1. $m = 2$. **Ответ:** 28.27.
2. $m = -2$. **Ответ:** -21.99.
3. $m = 3$. **Ответ:** 40.84.
4. $m = -3$. **Ответ:** -34.56.
5. $m = 4$. **Ответ:** 53.41.
6. $m = -4$. **Ответ:** -47.12.
7. $m = 5$. **Ответ:** 65.97.
8. $m = -5$. **Ответ:** -59.69.
9. $m = 6$. **Ответ:** 78.54.
10. $m = -6$. **Ответ:** -72.26.

2-13. Решите уравнение
$$\cos 8x = \frac{14}{3}(\cos 2x - \sin 2x)^2 - 1.$$
В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку A, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

2-13. $A = [\pi(4m-1)/2; (4m+1)\pi/2]$, $m = \pm 2, \pm 3, \pm 4$.
1. $m = 2$. **Ответ:** 24.35.
2. $m = -2$. **Ответ:** -25.92.
3. $m = 3$. **Ответ:** 36.91.
4. $m = -3$. **Ответ:** -38.48.
5. $m = 4$. **Ответ:** 49.48.
6. $m = -4$. **Ответ:** -51.05.
7. $m = 5$. **Ответ:** 62.05.
8. $m = -5$. **Ответ:** -63.62.
9. $m = 6$. **Ответ:** 74.61.
10. $m = -6$. **Ответ:** -76.18.

2-14. Решите уравнение
$$\sqrt{10}\cos x - \sqrt{4\cos x - \cos 2x} = 0.$$
В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку A, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

2-14. $A = [2m\pi; (2m+1)\pi]$, $m = \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6$.
1. $m = 2$. **Ответ:** 13.61.
2. $m = -2$. **Ответ:** -11.52.
3. $m = 3$. **Ответ:** 19.90.
4. $m = -3$. **Ответ:** -17.80.
5. $m = 4$. **Ответ:** 26.18.
6. $m = -4$. **Ответ:** -24.09.
7. $m = 5$. **Ответ:** 32.46.
8. $m = -5$. **Ответ:** -30.37.
9. $m = 6$. **Ответ:** 38.75.
10. $m = -6$. **Ответ:** -36.65.

2-15. Решите уравнение
$$\sin 2x - \sin 4x = (1 + \cos 2x)\cos 3x.$$

В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку A, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

2-15. $A=[2\pi m;(4m+1)\pi/2]$, $m=\pm 2,\pm 3,\pm 4,\pm 5,\pm 6$.
1. $m=2$. **Ответ:** 27.23.
2. $m=-2$. **Ответ:** -23.04.
3. $m=3$. **Ответ:** 39.79.
4. $m=-3$. **Ответ:** -35.60.
5. $m=4$. **Ответ:** 52.36.
6. $m=-4$. **Ответ:** -48.17.
7. $m=5$. **Ответ:** 64.93.
8. $m=-5$. **Ответ:** -60.74.
9. $m=6$. **Ответ:** 77.49.
10. $m=-6$. **Ответ:** -73.30.

1.3 Планиметрия

3-1. Внутри треугольника ABC со сторонами $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ выбрана точка M так, что $\angle AMB=\angle BMC=\angle CMA$. Найдите сумму квадратов расстояний от точки M до вершин треугольника. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

---

1. $a=3$, $b=4$, $c=6$. Ответ 24.
2. $a=5$, $b=4$, $c=6$. Ответ 27.
3. $a=7$, $b=4$, $c=6$. Ответ 37.
4. $a=8$, $b=4$, $c=6$. Ответ 45.
5. $a=9$, $b=4$, $c=6$. Ответ 55.
6. $a=3$, $b=5$, $c=6$. Ответ 26.
7. $a=3$, $b=7$, $c=6$. Ответ 37.
8. $a=3$, $b=8$, $c=6$. Ответ 46.
9. $a=5$, $b=6$, $c=7$. Ответ 38.
10. $a=5$, $b=6$, $c=8$. Ответ 45.
11. $a=5$, $b=6$, $c=10$. Ответ 67.
12. $a=5$, $b=7$, $c=10$. Ответ 68.
13. $a=5$, $b=8$, $c=10$. Ответ 72.
14. $a=5$, $b=9$, $c=10$. Ответ 77.

3-2. Найдите сумму квадратов всех высот треугольника, если известны два его угла α и β и площадь S. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

---

1. $\alpha=\pi/3$, $\beta=\pi/4$, $S=3$. Ответ 16.
2. $\alpha=\pi/6$, $\beta=\pi/4$, $S=6$. Ответ 29.
3. $\alpha=2\pi/3$, $\beta=\pi/4$, $S=9$. Ответ 52.
4. $\alpha=\pi/4$, $\beta=\pi/3$, $S=12$. Ответ 63.
5. $\alpha=\pi/4$, $\beta=\pi/6$, $S=12$. Ответ 58.
6. $\alpha=\pi/4$, $\beta=2\pi/3$, $S=8$. Ответ 46.
7. $\alpha=\pi/3$, $\beta=\pi/4$, $S=8$. Ответ 42.
8. $\alpha=\pi/6$, $\beta=\pi/4$, $S=10$. Ответ 48.
9. $\alpha=2\pi/3$, $\beta=\pi/4$, $S=12$. Ответ 69.
10. $\alpha=\pi/4$, $\beta=\pi/3$, $S=15$. Ответ 78.
11. $\alpha=\pi/4$, $\beta=\pi/6$, $S=15$. Ответ 72.
12. $\alpha=\pi/4$, $\beta=2\pi/3$, $S=15$. Ответ 87.

3-3. Из точки M, лежащей внутри треугольника ABC, на стороны BC, AC, AB проведены перпендикуляры, длины которых равны k, l и m соответственно. Найдите площадь треугольника ABC, если $\angle CAB = \alpha$ и $\angle ABC = \beta$. В случае, если ответ будет нецелым, округлите его до ближайшего целого.

1. $\alpha = \pi/3$, $\beta = \pi/4$, $k = 3$, $l = 2$, $m = 4$. Ответ 52.
2. $\alpha = \pi/6$, $\beta = \pi/4$, $k = 3$, $l = 2$, $m = 4$. Ответ 67.
3. $\alpha = 2\pi/3$, $\beta = \pi/4$, $k = 3$, $l = 2$, $m = 4$. Ответ 80.
4. $\alpha = \pi/4$, $\beta = \pi/3$, $k = 3$, $l = 2$, $m = 4$. Ответ 50.
5. $\alpha = \pi/4$, $\beta = \pi/6$, $k = 3$, $l = 2$, $m = 4$. Ответ 71.
6. $\alpha = \pi/4$, $\beta = 2\pi/3$, $k = 3$, $l = 2$, $m = 4$. Ответ 75.
7. $\alpha = \pi/3$, $\beta = \pi/4$, $k = 5$, $l = 3$, $m = 4$. Ответ 90.
8. $\alpha = \pi/6$, $\beta = \pi/4$, $k = 5$, $l = 3$, $m = 4$. Ответ 105.
9. $\alpha = 2\pi/3$, $\beta = \pi/4$, $k = 5$, $l = 3$, $m = 4$. Ответ 177.
10. $\alpha = \pi/4$, $\beta = \pi/3$, $k = 5$, $l = 3$, $m = 4$. Ответ 84.
11. $\alpha = \pi/4$, $\beta = \pi/6$, $k = 5$, $l = 3$, $m = 4$. Ответ 116.
12. $\alpha = \pi/4$, $\beta = 2\pi/3$, $k = 5$, $l = 3$, $m = 4$. Ответ 162.

3-4. Из точки M, лежащей внутри треугольник ABC, проведены перпендикуляры MD, ME, MF на стороны BC, AC, AB соответственно. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника DEF, если известно, что $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$, $MD = k$, $MF = m$. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

1. $a = 5$, $b = 4$, $c = 6$, $k = 2$, $m = 1$. Ответ 5.
2. $a = 5$, $b = 4$, $c = 6$, $k = 1$, $m = 1$. Ответ 4.
3. $a = 5$, $b = 7$, $c = 6$, $k = 1$, $m = 1$. Ответ 6.
4. $a = 5$, $b = 7$, $c = 6$, $k = 3$, $m = 1$. Ответ 4.
5. $a = 8$, $b = 7$, $c = 6$, $k = 3$, $m = 1$. Ответ 6.
6. $a = 8$, $b = 7$, $c = 6$, $k = 1/3$, $m = 1$. Ответ 7.
7. $a = 8$, $b = 7$, $c = 9$, $k = 2$, $m = 1$. Ответ 4.
8. $a = 8$, $b = 10$, $c = 9$, $k = 2$, $m = 1$. Ответ 5.
9. $a = 8$, $b = 10$, $c = 9$, $k = 2$, $m = 1$. Ответ 5.
10. $a = 8$, $b = 12$, $c = 9$, $k = 2$, $m = 1$. Ответ 7.
11. $a = 8$, $b = 12$, $c = 9$, $k = 1$, $m = 1$. Ответ 10.
12. $a = 8$, $b = 12$, $c = 9$, $k = 1$, $m = 1/2$. Ответ 12.
13. $a = 8$, $b = 12$, $c = 9$, $k = 1$, $m = 1/3$. Ответ 14.
14. $a = 10$, $b = 12$, $c = 9$, $k = 1$, $m = 2$. Ответ 6.

1.4 Системы: симметричные, сводящиеся к однородным

4-1-1. Решите систему

$$\begin{cases} x^2 + 3xy - 2y^2 = 2, \\ 3x^2 - xy + 5y^2 = 7. \end{cases}$$

Вычислите значения выражения $x_k y_k$ для каждого решения (x_k, y_k) системы и найдите среди них минимальное. В ответе укажите найденное минимальное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: -0.10.

4-1-2. Решите систему

$$\begin{cases} x^2+3xy-2y^2=2, \\ 3x^2-xy+5y^2=7. \end{cases}$$

Вычислите значения выражения x_k-y_k для каждого решения (x_k, y_k) системы и найдите среди них максимальное. В ответе укажите найденное максимальное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: 1.58

4-1-3. Решите систему

$$\begin{cases} 2x^2+3xy-y^2=1, \\ 12x^2-2xy+5y^2=7. \end{cases}$$

Вычислите значения выражения $x_k y_k$ для каждого решения (x_k, y_k) системы и найдите среди них минимальное. В ответе укажите найденное минимальное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: -0.05

4-1-4. Решите систему

$$\begin{cases} 2x^2+3xy-y^2=1, \\ 12x^2-2xy+5y^2=7. \end{cases}$$

Вычислите значения выражения x_k-y_k для каждого решения (x_k, y_k) системы и найдите среди них максимальное. В ответе укажите найденное максимальное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: 0.82

4-2-1. Решите систему

$$\begin{cases} x^4-3x^2y^2+y^4=-1, \\ x^2+xy+y^2=3. \end{cases}$$

Вычислите значения выражения x_k-y_k для каждого решения (x_k, y_k) системы и найдите среди них максимальное. В ответе укажите найденное максимальное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: 3.24.

4-2-2. Решите систему

$$\begin{cases} x^4-3x^2y^2+y^4=-1, \\ x^2+xy+y^2=3. \end{cases}$$

Вычислите значения выражения $|x_k+y_k|$ для каждого решения (x_k, y_k) системы и найдите среди них минимальное. В ответе укажите найденное минимальное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: 0.71.

4-2-3. Решите систему

$$\begin{cases} x^4 - 3x^2y^2 + y^4 = -16, \\ x^2 + xy + y^2 = 12. \end{cases}$$

Вычислите значения выражения $x_k - y_k$ для каждого решения (x_k, y_k) системы и найдите среди них максимальное. В ответе укажите найденное максимальное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: 6.48.

4-2-4. Решите систему

$$\begin{cases} x^4 - 3x^2y^2 + y^4 = -16, \\ x^2 + xy + y^2 = 12. \end{cases}$$

Вычислите значения выражения $|x_k + y_k|$ для каждого решения (x_k, y_k) системы и найдите среди них минимальное. В ответе укажите найденное минимальное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: 1.41.

4-3-1. Решите систему

$$\begin{cases} x^3 + 3y^3 = 11, \\ x^2y + xy^2 = 6. \end{cases}$$

Вычислите значения выражения $\dfrac{x_k}{y_k}$ для каждого решения (x_k, y_k) системы и найдите среди них минимальное. В ответе укажите найденное минимальное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: -1.31.

4-3-2. Решите систему

$$\begin{cases} x^3 + 3y^3 = 88, \\ x^2y + xy^2 = 48. \end{cases}$$

Вычислите значения выражения $\dfrac{y_k}{x_k}$ для каждого решения (x_k, y_k) системы и найдите среди них минимальное. В ответе укажите найденное минимальное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: -0.76.

4-4-1. Решите систему

$$\begin{cases} 3(x^4 + y^4) = 17(x^3y + xy^3), \\ x^2 + y^2 = 6. \end{cases}$$

Вычислите значения выражения $x_k + y_k$ для каждого решения (x_k, y_k) системы и найдите среди них максимальное. В ответе укажите найденное максимальное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: 2.83.

4-4-2. Решите систему

$$\begin{cases} 3(x^4 + y^4) = -17(x^3y + xy^3), \\ x^2 + y^2 = 6. \end{cases}$$

Вычислите значения выражения $x_k - y_k$ для каждого решения (x_k, y_k) системы и найдите среди них минимальное. В ответе укажите найденное минимальное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: -2.83.

4-4-3. Решите систему

$$\begin{cases} 3(x^4 + y^4) = 17(x^3y + xy^3), \\ x^2 + y^2 = 24. \end{cases}$$

Вычислите значения выражения $x_k + y_k$ для каждого решения (x_k, y_k) системы и найдите среди них максимальное. В ответе укажите найденное максимальное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: 5.66.

4-4-4. Решите систему

$$\begin{cases} 3(x^4 + y^4) = -17(x^3y + xy^3), \\ x^2 + y^2 = 24. \end{cases}$$

Вычислите значения выражения $x_k - y_k$ для каждого решения (x_k, y_k) системы и найдите среди них минимальное. В ответе укажите найденное минимальное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: -5.66.

1.5 Проценты

5-1. Имеется два сплава. Первый сплав содержит $p\%$ примесей, а второй – соответственно $q\%$ примесей. Определите, в какой пропорции следует соединить эти сплавы, чтобы получился новый сплав, в котором содержится $r\%$ примесей. В ответе укажите отношение массы первого сплава к массе второго в виде десятичной дроби, округлив ее при необходимости до двух знаков после запятой.

5-1-1. $p = 90$, $q = 20$, $r = 40$. **Ответ:** $0,4$.

5-1-2. $p = 90$, $q = 30$, $r = 40$. **Ответ:** $0,2$.

5-1-3. $p = 80$, $q = 10$, $r = 40$. **Ответ:** $0,75$.

5-1-4. $p = 80$, $q = 10$, $r = 30$. **Ответ:** $0,4$.

5-1-5. $p = 75$, $q = 20$, $r = 25$. **Ответ:** $0,1$.

5-1-6. $p = 75$, $q = 10$, $r = 50$. **Ответ:** $1,6$.

5-1-7. $p = 70$, $q = 5$, $r = 20$. **Ответ:** $0,3$.

5-1-8. $p = 70$, $q = 5$, $r = 40$. **Ответ:** $1,17$.

5-2. При сушке виноград теряет $p\%$ влаги, а абрикосы – $q\%$ влаги. Определите, в какой пропорции необходимо взять виноград и абрикосы, чтобы после сушки получилась смесь, содержащая одинаковое по весу количество изюма и урюка. В ответе укажите отношение массы винограда к массе абрикосов в виде десятичной дроби, округлив ее при необходимости до двух знаков после запятой.

5-2-1. $p = 20$, $q = 40$. **Ответ:** $0,75$.

5-2-2. $p = 10$, $q = 30$. **Ответ:** $0,78$.

5-2-3. $p = 40$, $q = 70$. **Ответ:** $0,5$.

5-2-4. $p = 40$, $q = 10$. **Ответ:** $1,5$.

5-2-5. $p = 50$, $q = 30$. **Ответ:** $1,4$.

5-2-6. $p = 50$, $q = 25$. **Ответ:** $1,5$.

5-3. В результате реструктуризации импорта на складе торговой сети овощей стало на $p\%$ больше, а фруктов – на $q\%$ меньше. Определите, сколько процентов фруктов стало на складе, если до реструктуризации их было $a\%$. Ответ запишите в виде десятичной дроби, округлив ее при необходимости до двух знаков после запятой.

5-3-1. $p = 20$, $q = 30$, $a = 30$. **Ответ:** 20.

5-3-2. $p = 40$, $q = 20$, $a = 20$. **Ответ:** $12,5$.

5-3-3. $p = 35$, $q = 10$, $a = 20$. **Ответ:** $14,28$.

5-3-3. $p = 20$, $q = 10$, $a = 40$. **Ответ:** $33,33$.

5-3-4. $p = 20$, $q = 20$, $a = 40$. **Ответ:** $30,77$.

5-3-5. $p = 30$, $q = 20$, $a = 60$. **Ответ:** 48.

5-3-6. $p = 35$, $q = 10$, $a = 60$. **Ответ:** 50.

Заочный тур «Покори Воробьевы Горы!» (ноябрь 2014 г.)

Задача 1. Определите, сколькими нулями оканчивается число $N!$.

Решение. Пусть $N = 2014$. Из 2014 первых натуральных чисел на 5 делится 402 числа, из них на 25 делятся 80 чисел. Из этих 80ти чисел на 125 делятся 16 чисел, из которых на 625 делятся 3 числа. Четных чисел среди первых 2014 натуральных чисел больше, чем делящихся на 5. Таким образом, количество нулей в конце числа 2014! определяется количеством «пятерок»-делителей в этом числе. Итого: $402 + 80 + 16 + 3 = 501$ нуль.

Ответ: $m = 501$.

□

1. $N = 2013!$. Ответ 501.
2. $N = 2014!$. Ответ 501.
3. $N = 2015!$. Ответ 502.
4. $N = 2016!$. Ответ 502.
5. $N = 2020!$. Ответ 503.
6. $N = 2024!$. Ответ 503.
7. $N = 2025!$. Ответ 505.
8. $N = 2027!$. Ответ 505.

Задача 2. 2-1. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = x^2 + (x-2)^2 + (x-4)^2 + \ldots + (x-100)^2.$$

В случае, если получится нецелое число, в ответ запишите результат его округления до ближайшего целого.

Решение. Требуется знание арифметической прогрессии. Получается квадратичная функция

$$f(x) = 51x^2 - 2(2+4+6+\ldots+100)x + (2^2+4^2+6^2+\ldots+100^2) = 51x^2 - 2\cdot 50\cdot 51x + 4\cdot(1^2+2^2+3^2+\ldots+50^2).$$

Минимум достигается в точке $x_0 = 50$. При этом

$$f(50) = 50^2+48^2+46^2+\ldots+2^2+0^2+2^2+4^2+\ldots+50^2 = 2\cdot(2^2+4^2+\ldots+50^2) = 8\cdot(1^2+2^2+3^2+\ldots+25^2).$$

Теперь нужна формула

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(она известна, но, в принципе, её можно и вывести). Тогда $f(50) = 8 \cdot \frac{25\cdot 26\cdot 51}{6} = 17 \cdot 26 \cdot 100 = 44200$.

Ответ: $44'200$.

□

2-2. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = x^2 + (x-2)^2 + (x-4)^2 + \ldots + (x-102)^2.$$

В случае, если получится нецелое число, в ответ запишите результат его округления до ближайшего целого.

Решение. $f(x) = 52x^2 - 2(2+4+\ldots+102)x + 2^2+4^2+\ldots+102^2 = 52x^2 - 2\cdot 51\cdot 52x + 4(1^2+2^2+3^2+\ldots+51^2)$.

Минимум функции f достигается в точке $x_0 = 51$. $f(51) = 51^2+49^2+\ldots 1^2+1^2+3^2+\ldots+49^2+51^2 = 2(1^2+3^2+\ldots 51^2)$. Так как $1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$ (формула менее известна, но тоже можно вывести), то $f(51) = \dfrac{26(52^2-1)}{3} = 46\,852$.

Ответ: 46 852.

□

2-3. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = (x-1)^2 + (x-3)^2 + \ldots + (x-101)^2.$$

В случае, если получится нецелое число, в ответ запишите результат его округления до ближайшего целого.

Решение. $f(x) = 51x^2 - 2(1+3+\ldots+101)x + (1^2+3^2+\ldots+101^2) = 51x^2 - 2\cdot 51^2x + (1^2+3^2+\ldots+101^2)$.

Минимум функции f достигается в точке $x_0 = 51$. Так как $1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$, то $f(51) = 51^3 - 2\cdot 51^3 + 51^3 + \dfrac{51^3}{3} - \dfrac{51}{3} = \dfrac{51^3}{3} - \dfrac{51}{3} = 44\,200$.

Ответ: 44 200.

□

2-4. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = x^2 + (x-2)^2 + (x-4)^2 + \ldots + (x-104)^2.$$

В случае, если получится нецелое число, в ответ запишите результат его округления до ближайшего целого.

Решение. $f(x) = 53x^2 - 2(2+4+\ldots 104)x + 4(1^2+2^2+\ldots+52^2) = 53x^2 - 2\cdot 52\cdot 53x + 4\cdot\dfrac{52\cdot 53\cdot 105}{6}$ (так как $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$).

Минимум функции f достигается в точке $x_0 = 52$. $f(52) = 53\cdot 52^2 - 2\cdot 53\cdot 52^2 + 2\cdot 52\cdot 53\cdot 35 = 52\cdot 53(70-52) = 49\,608$.

Ответ: 49 608.

□

Задача 3. Определите, сколько корней уравнения

$$4\sin 2x + 3\cos 2x - 2\sin x - 4\cos x + 1 = 0$$

расположено на отрезке $[10^{2014!}\pi; 10^{2014!+2015}\pi]$. В ответ запишите сумму всех цифр найденного числа.

Решение. Пусть $t=\sin x+2\cos x$. Тогда $t^2=\sin^2 x+2\sin 2x+4\cos^2 x=2\sin 2x+\frac{3}{2}\cos 2x+\frac{5}{2}$. Исходное уравнение равносильно $t^2-t-2=0$. Откуда

$$\left[\begin{array}{c}\sin x+2\cos x=-1,\\ \sin x+2\cos x=2.\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{c}\sin(x+\varphi)=-\frac{1}{\sqrt{5}},\\ \sin(x+\varphi)=\frac{2}{\sqrt{5}},\end{array}\right.$$

где $\varphi=\operatorname{arctg} 2$. Следовательно, исходное уравнение имеет ровно четыре корня на любом отрезке вида $[2k\pi;2(k+1)\pi]$, $k\in\mathbb{Z}$. Количество корней обозначим через N. Поскольку на периоде (минимальный период функций, входящих в уравнение равен 2π) четыре различных корня, то

$$N=4\cdot\frac{10^{2014!+2015}\pi-10^{2014!}\pi}{2\pi}=2\cdot 10^{2014!}(10^{2015}-1)=$$
$$=2\cdot 10^{2014!}\cdot\underbrace{9....9}_{2015}=1\underbrace{9....9}_{2014}8\cdot 10^{2014!}=1\underbrace{9....9}_{2014}8\underbrace{0....0}_{2014!}.$$

Сумма всех цифр этого числа равна $1+8+9\cdot 2014=9\cdot 2015=18135$.

Ответ: 18135.

□

1. Уравнение $4\sin 2x+3\cos 2x-2\sin x-4\cos x+1=0$ отрезок $[10^{2014!}\pi;10^{2014!+2015}\pi]$. Ответ 18135.
2. Уравнение $2\sin 2x+\cos 2x+\cos^2 x-\sin x-2\cos x=0$ отрезок $[10^{2014!}\pi;10^{2014!+2014}\pi]$. Ответ 18126.
3. Уравнение $2\sin 2x+\cos 2x-\sin^2 x-\sin x-2\cos x+1=0$ отрезок $[10^{2014!}\pi;10^{2014!+2016}\pi]$. Ответ 18144.
4. Уравнение $4\sin 2x+\cos 2x+4\cos^2 x-2\sin x-4\cos x-1=0$ отрезок $[10^{2014!}\pi;10^{2014!+2017}\pi]$. Ответ 18153.
5. Уравнение $24\sin 2x+7\cos 2x-36\sin x-48\cos x+35=0$ отрезок $[10^{2014!}\pi;10^{2014!+2018}\pi]$. Ответ 18162.

Решение. Пусть $t=3\sin x+4\cos x$. Исходное уравнение равносильно $t^2-6t+5=0$. Откуда

$$\left[\begin{array}{c}3\sin x+4\cos x=5,\\ 3\sin x+4\cos x=1.\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{c}\sin(x+\varphi)=1,\\ \sin(x+\varphi)=1/5,\end{array}\right.$$

где $\varphi=\operatorname{arctg}(4/3)$. Следовательно, исходное уравнение имеет ровно три корня на любом отрезке вида $[2k\pi;2(k+1)\pi]$, $k\in\mathbb{Z}$. Количество корней обозначим через N. Поскольку на периоде (минимальный период функций, входящих в уравнение равен 2π) три различных корня, то

$$N=3\cdot\frac{10^{2014!+2018}\pi-10^{2014!}\pi}{2\pi}=3\cdot 5\cdot 10^{2014!-1}(10^{2018}-1)=$$
$$=15\cdot 10^{2014!-1}\cdot\underbrace{9....9}_{2018}=14\underbrace{9....9}_{2016}85\cdot 10^{2014!-1}$$

Сумма всех цифр этого числа равна $1+4+9\cdot 2016+8+5=9\cdot 2018=18162$.

Ответ: 18162.

□

6. Уравнение $12\sin 2x+3\cos 2x+\cos^2 x-18\sin x-24\cos x+17=0$ отрезок $[10^{2014!}\pi;10^{2014!+2019}\pi]$. Ответ 18171.
7. Уравнение $12\sin 2x+3\cos 2x-\sin^2 x-18\sin x-24\cos x+18=0$ отрезок $[10^{2014!}\pi;10^{2014!+2020}\pi]$. Ответ 18180.
8. Уравнение $24\sin 2x+5\cos 2x+4\cos^2 x-36\sin x-48\cos x+33=0$ отрезок $[10^{2014!}\pi;10^{2014!+2021}\pi]$. Ответ 18189.
9. Уравнение $8\cos 2x+15\sin 2x-15\sin x-25\cos x+23=0$ отрезок $[10^{2014!}\pi;10^{2014!+2022}\pi]$. Ответ 18198.

Решение. Пусть $t = 3\sin x + 5\cos x$. Исходное уравнение равносильно $t^2 - 5t + 6 = 0$. Откуда $t = 2$, $t = 3$.

Ответ: 18198.

$\square$

10. Уравнение $8\cos 2x + 15\sin 2x - 15\sin x - 25\cos x + 23 = 0$ отрезок $[10^{2014!}\pi; 10^{2014!+2023}\pi]$. Ответ 18207.

11. Уравнение $7\cos 2x + 15\sin 2x + 2\cos^2 x - 15\sin x - 25\cos x + 22 = 0$ отрезок $[10^{2014!}\pi; 10^{2014!+2024}\pi]$. Ответ 18216.

12. Уравнение $6\cos 2x + 15\sin 2x + 4\cos^2 x - 15\sin x - 25\cos x + 21 = 0$ отрезок $[10^{2014!}\pi; 10^{2014!+2025}\pi]$. Ответ 18225.

Задача 4. Найдите наименьшее натуральное m, для которого существует такое натуральное n, что наборы последних 2014 цифр в десятичной записи чисел $a = 2015^{3m+1}$ и $b = 2015^{6n+2}$ одинаковы, причем $a < b$.

Решение. Совпадение последних 2014 цифр указанных двух степеней означает делимость на 10^{2014} разности

$$2015^{6n+2} - 2015^{3m+1} = 2015^{3m+1} \cdot \left(2015^{6n-3m+1} - 1\right),$$

а коль скоро первый сомножитель в полученном разложении не кратен 2, а второй не кратен 5, то делимость полученного произведения на 10^{2014} означает две делимости сразу

$$2015^{3m+1} \,\vdots\, 5^{2014}, \quad 2015^{6n-3m+1} - 1 \,\vdots\, 2^{2014}.$$

Первая делимость означает неравенство $3m + 1 \geqslant 2014$, или $m \geqslant m_0 = 671$. Проверим, что число $m = m_0$ реализуется, т.е. для него при некотором $n = n_0$ имеет место и вторая делимость.

Действительно, обозначим $N = 2^{2014}$ и заметим, что для нечетного $K = 2015$ число

$$K^N - 1 = (K^{N/2} + 1)(K^{N/2} - 1) = \ldots = (K^{N/2} + 1)(K^{N/4} + 1)\ldots(K^1 + 1)(K^1 - 1)$$

кратно N (в последнем представлении этого числа все выражения в скобках четны, а количество скобок равно 2014). Поэтому $\left(2015^N - 1\right) \,\vdots\, 2^{2014}$, а равенство $6n_0 - 3m_0 + 1 = N$ выполняется при

$$n_0 = \left(\frac{N-1}{3} + m_0\right)/2.$$

где $n_0 \in \mathbb{N}$, поскольку число

$$N - 1 = 2^{2014} - 1 = (3-1)^{2014} - 1$$

кратно трём, причем частное $(N-1)/3$ нечетно.

Ответ: $m = 671$.

$\square$

1. $a = 2015^{3m+1}$, $b = 2015^{6n+2}$. Ответ 671.
2. $a = 2015^{3m+4}$, $b = 2015^{6n-4}$. Ответ 670.
3. $a = 2015^{3m+7}$, $b = 2015^{6n+2}$. Ответ 669.
4. $a = 2015^{3m-2}$, $b = 2015^{6n-4}$. Ответ 672.
5. $a = 2015^{5m-1}$, $b = 2015^{10n-2}$. Ответ 403.
6. $a = 2015^{5m+4}$, $b = 2015^{10n+8}$. Ответ 402.
7. $a = 2015^{5m+9}$, $b = 2015^{10n-2}$. Ответ 401.
8. $a = 2015^{5m+19}$, $b = 2015^{10n+8}$. Ответ 399.

Задача 5. Из вершины B треугольника ABC проведена прямая, пересекающая сторону AC в точке E. Найдите высоту BF треугольника ABC, если известно, что центр описанной вокруг треугольника ABC окружности лежит на луче BE, $AF \cdot FE = 5$ и $\operatorname{ctg}\angle EBC : \operatorname{ctg}\angle BEC = 3 : 4$. В ответе укажите найденную высоту, при необходимости округлив ее до двух знаков после запятой.

Решение. Из точки C опустим перпендикуляр CD на прямую BE. Тогда отношение котангенсов даёт соотношение $BD : DE = 3 : 4$. Поскольку $DE > BD$, имеем $EC > BC$. Так как в прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета, то $BC > CF$, и следовательно, точка F лежит между точками E и C (см. рис. 1).

По условию центр описанной окружности лежит на BE, следовательно, $\angle ABE = \angle FBC$. Откуда вытекает подобие

$$\begin{aligned} \triangle ABF \sim \triangle CBD \quad &\Longrightarrow \quad \frac{BF}{AF} = \frac{BD}{CD} \\ \triangle FBE \sim \triangle DCE \quad &\Longrightarrow \quad \frac{BF}{FE} = \frac{CD}{DE}. \end{aligned}$$

Перемножив полученные равенства почленно, получим $\frac{BF^2}{AF \cdot FE} = \frac{BD}{DE}$. Откуда $BF = \sqrt{AF \cdot FE \cdot \frac{BD}{DE}} = \sqrt{5 \cdot 3/4} = \sqrt{15}/2$.

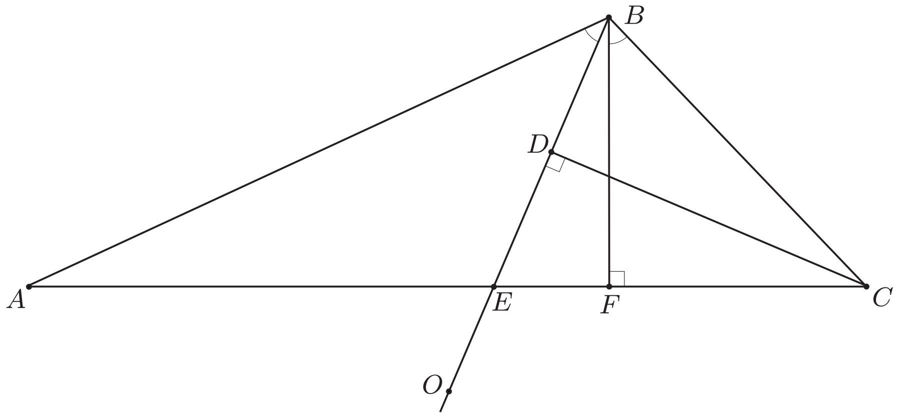

Рис. 1:

Ответ: $\sqrt{15}/2 = 1.936.. \approx 1.94$.

□

1. $AF \cdot FE = 5$ и $\operatorname{ctg}\angle EBC : \operatorname{ctg}\angle BEC = 3 : 4$. Ответ $\sqrt{15}/2 \approx 1.94$.
2. $AF \cdot FE = 6$ и $\operatorname{ctg}\angle EBC : \operatorname{ctg}\angle BEC = 3 : 4$. Ответ $3\sqrt{2}/2 \approx 2.12$.
3. $AF \cdot FE = 7$ и $\operatorname{ctg}\angle EBC : \operatorname{ctg}\angle BEC = 4 : 5$. Ответ $2\sqrt{7/5} \approx 2.37$.
4. $AF \cdot FE = 8$ и $\operatorname{ctg}\angle EBC : \operatorname{ctg}\angle BEC = 4 : 5$. Ответ $4\sqrt{2/5} \approx 2.53$.
5. $AF \cdot FE = 9$ и $\operatorname{ctg}\angle EBC : \operatorname{ctg}\angle BEC = 5 : 6$. Ответ $\sqrt{15/2} \approx 2.74$.
6. $AF \cdot FE = 10$ и $\operatorname{ctg}\angle EBC : \operatorname{ctg}\angle BEC = 5 : 6$. Ответ $5/\sqrt{3} \approx 2.89$.
7. $AF \cdot FE = 11$ и $\operatorname{ctg}\angle EBC : \operatorname{ctg}\angle BEC = 6 : 7$. Ответ $\sqrt{66/7} \approx 3.07$.
8. $AF \cdot FE = 12$ и $\operatorname{ctg}\angle EBC : \operatorname{ctg}\angle BEC = 6 : 7$. Ответ $6\sqrt{2/7} \approx 3.21$.
9. $AF \cdot FE = 13$ и $\operatorname{ctg}\angle EBC : \operatorname{ctg}\angle BEC = 7 : 8$. Ответ $(1/2) \cdot \sqrt{91/2} \approx 3.37$.
10. $AF \cdot FE = 15$ и $\operatorname{ctg}\angle EBC : \operatorname{ctg}\angle BEC = 7 : 8$. Ответ $(1/2) \cdot \sqrt{105/2} \approx 3.62$.

Задача 6. Найдите значение a, при котором минимальна сумма всех действительных корней уравнения

$$\frac{f(a) \cdot x^2 + 1}{x^2 + g(a)} = \sqrt{\frac{xg(a) - 1}{f(a) - x}},$$

где $f(a) = a^2 - \sqrt{21}a + 26$, $g(a) = \frac{3}{2}a^2 - \sqrt{21}a + 27$. В ответе укажите найденное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Решение. **I способ решения**. Заметим, что при всех значениях a: $g(a) > f(a) \geqslant 20$, и следовательно, О.Д.З. уравнения не содержит отрицательных чисел. На множестве $x \geqslant 0$ функции $F(x) = \frac{f(a)\cdot x^2+1}{x^2+g(a)}$ и $F^{-1}(x) = \sqrt{\frac{xg(a)-1}{f(a)-x}}$ взаимно обратные. Несложно доказать, что для каждого значения a функция $F(x) = \frac{f(a)\cdot x^2+1}{x^2+g(a)}$ монотонно возрастает на множестве $x \in [0; +\infty)$. Действительно, это вытекает из представления $F(x) = f(a) + \frac{1-f(a)g(a)}{x^2+g(a)}$ и неравенства $1 - f(a)g(a) < 0$.

Тем самым, исходное уравнение равносильно:

$$F(x) = F^{-1}(x) \Longleftrightarrow F(F(x)) = F(F^{-1}(x)) \Longleftrightarrow F(F(x)) = x \Longleftrightarrow F(x) = x, \quad x \geqslant 0.$$

Докажем, что уравнение

$$\frac{f(a)\cdot x^2+1}{x^2+g(a)} = x$$

имеет ровно три положительных корня. Перепишем его в виде

$$x^3 - f(a)x^2 + g(a)x - 1 = 0.$$

Для выражения $h(x)$, стоящего в левой части этого кубического уравнения, при любом значении a выполнено:

$$\begin{aligned}
&h(0) = -1 < 0,\\
&h(1) = g(a) - f(a) = \frac{1}{2}a^2 + 1 > 0,\\
&h(2) = 7 - 4f(a) + 2g(a) = -a^2 + 2\sqrt{21}a - 43 < 0,\\
&h(+\infty) = +\infty.
\end{aligned}$$

Отсюда и из непрерывности функции $h(x)$ вытекает, что при любом значении a существуют $x_1 \in (0; 1)$, $x_2 \in (1; 2)$, $x_3 \in (2; +\infty)$ такие, что $h(x_{1,2,3}) = 0$.

По теореме Виета сумма этих трех действительных корней равна $f(a) = a^2 - \sqrt{21}a + 26$. Минимум данного выражения достигается при $a = \sqrt{21}/2 = 2.291... \approx 2.29$

Ответ: $a = \sqrt{21}/2 \approx 2.29$.

II способ решения. Исходное уравнение, после возведения в квадрат равносильно

$$\begin{cases}
(g + f^2)x^5 - (1 + f^3)x^4 + 2x^3(g^2 + f) - 2(g + f^2)x^2 + x(1 + g^3) - (g^2 + f) = 0;\\
\frac{f(a)\cdot x^2+1}{x^2+g(a)} \geqslant 0;\\
x - f(a) \neq 0;\\
x^2 + g(a) \neq 0.
\end{cases}$$

Заметим, что выполнено

$$f(a) = a^2 - \sqrt{21}a + 26 = \left(a - \frac{\sqrt{21}}{2}\right)^2 + \frac{83}{4} \geqslant \frac{83}{4} > 0,$$

$$g(a) = \frac{3}{2}a^2 - \sqrt{21}a + 27 = \frac{3}{2}\left(a - \frac{\sqrt{21}}{3}\right)^2 + \frac{47}{2} \geqslant \frac{47}{2} > 0.$$

Разложим первое уравнеие в системе на множители. Следовательно система равносильна следующему:

$$\begin{cases}
\left(x^3 - x^2f + xg - 1\right) \cdot \left(x^2(f^2 + g) + x(fg - 1) + (f + g^2)\right) = 0;\\
x \neq f(a).
\end{cases}$$

Квадратное уравнение $x^2(f^2+g)+x(fg-1)+(f+g^2)=0$ не имеет решений, т.к.

$$D=(fg-1)^2-4(f+g^2)(g+f^2)=1-6fg-2f^2g^2-4f^3-4g^3<1-6fg<1-\frac{83}{4}\cdot\frac{47}{2}<0,$$

при любом значении $a\in\mathbb{R}$. Исходное уравнеие равносильно:

$$\left\{\begin{array}{l} x^3-x^2f+xg-1=0; \\ x\neq f(a). \end{array}\right.$$

Для выражения $h(x)=x^3-x^2f+xg-1$, стоящего в левой части этого кубического уравнения, при любом значении a выполнено:

$$\begin{aligned}
&h(0)=-1<0,\\
&h(1)=g(a)-f(a)=\frac{1}{2}a^2+1>0,\\
&h(2)=7-4f(a)+2g(a)=-a^2+2\sqrt{21}a-43<0,\\
&h(f)=f\cdot g-1\geqslant\frac{83}{4}\cdot\frac{47}{2}-1>0.
\end{aligned}$$

Отсюда и из непрерывности функции $h(x)$ вытекает, что при любом значении a существуют $x_1\in(0;1)$, $x_2\in(1;2)$, $x_3\in(2;f(a))$ такие, что $h(x_{1,2,3})=0$.

По теореме Виета сумма этих трех действительных корней равна $f(a)=a^2-\sqrt{21}a+26$. Минимум данного выражения достигается при $a=\sqrt{21}/2=2.291...\approx 2.29$

Ответ: $a=\sqrt{21}/2\approx 2.29$.

□

1. $f(a)=a^2-\sqrt{21}a+26$, $g(a)=\frac{3}{2}a^2-\sqrt{21}a+27$. Тогда $a=\sqrt{21}/2\approx 2.29$.
2. $f(a)=a^2-\sqrt{23}a+25$, $g(a)=\frac{3}{2}a^2-\sqrt{23}a+27$. Тогда $a=\sqrt{23}/2\approx 2.40$.
3. $f(a)=a^2-\sqrt{22}a+26$, $g(a)=\frac{3}{2}a^2-\sqrt{22}a+27$. Тогда $a=\sqrt{22}/2\approx 2.35$.
4. $f(a)=a^2-\sqrt{19}a+25$, $g(a)=\frac{3}{2}a^2-\sqrt{19}a+27$. Тогда $a=\sqrt{19}/2\approx 2.18$.
5. $f(a)=a^2-2\sqrt{5}a+23$, $g(a)=\frac{3}{2}a^2-2\sqrt{5}a+24$. Тогда $a=\sqrt{5}\approx 2.24$.
6. $f(a)=a^2-3\sqrt{2}a+23$, $g(a)=\frac{3}{2}a^2-3\sqrt{2}a+26$. Тогда $a=3\sqrt{2}/2\approx 2.12$.
7. $f(a)=a^2-\sqrt{17}a+21$, $g(a)=\frac{3}{2}a^2-\sqrt{17}a+26$. Тогда $a=\sqrt{17}/2\approx 2.06$.
8. $f(a)=a^2-\sqrt{15}a+21$, $g(a)=\frac{3}{2}a^2-\sqrt{15}a+23$. Тогда $a=\sqrt{15}/2\approx 1.94$.
9. $f(a)=a^2-\sqrt{14}a+22$, $g(a)=\frac{3}{2}a^2-\sqrt{14}a+23$. Тогда $a=\sqrt{14}/2\approx 1.87$.
10. $f(a)=a^2-\sqrt{13}a+22$, $g(a)=\frac{3}{2}a^2-\sqrt{13}a+25$. Тогда $a=\sqrt{13}/2\approx 1.80$.

Задача 7. Многогранник с n вершинами, вписанный в сферу радиуса R, назовем *кристаллическим*, если можно выбрать такой набор из $n-1$ вершины этого многогранника, что все тетраэдры с вершинами в любых 4 точках этого набора равновелики. Каков максимальный объём кристаллического многогранника? В ответе укажите найденное число, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Решение. Отметим, что n можно брать любое, большее либо равное 11.

Свойство равносильно тому, что все $n-1$ точки лежат в одной плоскости (объёмы тетраэдров равны нулю, тут важно, что таких точек больше, чем 9). Покажем, что экстремальная конструкция будет, когда все $n-1$ вершины, оказавшиеся в одной плоскости, лежат в вершинах правильного многоугольника в сечении сферы, отстоящей от центра окружности на $R/3$, а оставшееся точка лежит на перпендикуляре к центру круга полученного сечения на расстояние $4R/3$ от этой плоскости.

То, что правильный многоугольник имеет максимальную площадь среди вписанных, можно обосновать следующим образом. Пусть, например, $A_1A_2\neq A_2A_3$. Обозначим, через B точку на окружности

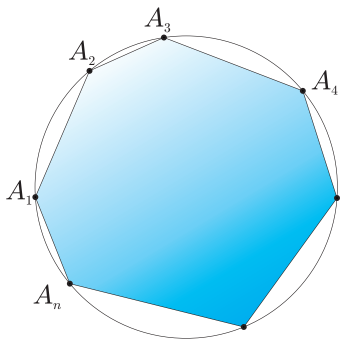

Рис. 2:

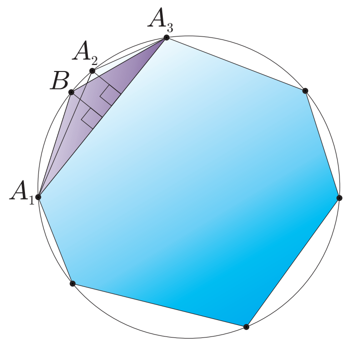

Рис. 3:

такую, что $A_1B = BA_3$. Тогда площадь треугольника A_1BA_3 больше площади треугольника $A_1A_2A_3$ (см. рис. 2 и рис. 3).

Площадь правильного m угольника, вписанного в окружность радиуса r равна

$$S = \frac{mr^2}{2}\sin\frac{2\pi}{m}.$$

Пусть x — расстояние от центра сферы до плоскости в которой находятся $n-1$ вершина многогранника. Тогда радиус окружности сечения равен $r = \sqrt{R^2 - x^2}$, а объём пирамиды равен

$$V = \frac{1}{3}(R+x)\cdot S = \frac{(n-1)(R+x)(R^2-x^2)}{3\cdot 2}\sin\frac{2\pi}{n-1}.$$

Докажем, что высота пирамиды $R + x$ в экстремальной конструкции равна $4R/3$, т.е. $x = R/3$.

Действительно, объём будет наибольшем, при наибольшем значении функции $f(x) = (R + x)(R^2 - x^2)$, где $x \in [-R; R]$. Из равенства $f'(x) = R^2 - 2xR - 3R^2 = (R - 3x)(R + x)$ находим, что наибольшее значении будет в точке $x = R/3$. Следовательно

$$V = \frac{16}{81}\cdot(n-1)R^3\sin\frac{2\pi}{n-1}.$$

Ответ: $\frac{32}{81}\cdot(n-1)R^3\sin\frac{2\pi}{n-1}$.

□

1. $n = 106$, $R = 3$. Тогда $V \approx 33.49$.
2. $n = 107$, $R = 6$. Тогда $V \approx 267.93$.
3. $n = 119$, $R = 3$. Тогда $V \approx 33.49$.
4. $n = 119$, $R = 7$. Тогда $V \approx 425.50$.
5. $n = 101$, $R = 7$. Тогда $V \approx 425.43$.
6. $n = 104$, $R = 5$. Тогда $V \approx 155.04$.
7. $n = 107$, $R = 2$. Тогда $V \approx 9.92$.
8. $n = 110$, $R = 5$. Тогда $V \approx 155.05$.
9. $n = 116$, $R = 4$. Тогда $V \approx 79.39$.
10. $n = 116$, $R = 6$. Тогда $V \approx 267.95$.
11. $n = 101$, $R = 4$. Тогда $V \approx 79.38$.
12. $n = 122$, $R = 5$. Тогда $V \approx 155.07$.