Олимпиада «Покори Воробьевы горы!»
10 - 11 классы
Решения и ответы к заданиям 3-го тура

При решении задач, в которых предусмотрен ответ из предложенных вариантов, участник может выбрать в качестве ответа один из предложенных: A,B,C,D,E.

В случае, если ни один из указанных пунктов не подходит, либо подходят несколько из них, следует выбрать пункт F.

1.1 Миша заметил, что трамвай прошел мимо него за 3 секунды, а тоннель длиной 100 метров — за 13 секунд. Найдите скорость трамвая (в метрах в секунду), считая, что она остается одной и той же в течение всего времени наблюдения.

Решение. Обозначим скорость трамвая (в метрах в секунду) через v, а длину трамвая (в метрах) через l. Если t_1 и t_2 — времена прохождения поезда мимо Миши и через тоннель длиной a соответственно, то

$$\begin{cases} l = v \cdot t_1, \\ a + l = v \cdot t_2. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} v = \frac{a}{t_2 - t_1}, \\ l = \frac{at_1}{t_2 - t_1}. \end{cases}$$

Поскольку $t_1 = 3$, $t_2 = 13$ и $a = 100$, то $v = 10$.

Ответ: 10. (A)

□

A 10 **B** 12 **C** 25 **D** 28 **E** 32 **F**

1.2 Миша заметил, что трамвай прошел мимо него за 4 секунды, а тоннель длиной 64 метра — за 12 секунд. Найдите длину трамвая (в метрах), считая, что его скорость остается одной и той же в течение всего времени наблюдения.

Ответ: 32. (E)

A 10 **B** 12 **C** 25 **D** 28 **E** 32 **F**

1.3 Миша заметил, что трамвай прошел мимо него за 2 секунды, а тоннель длиной 96 метров — за 10 секунд. Найдите скорость трамвая (в метрах в секунду), считая, что она остается одной и той же в течение всего времени наблюдения.

Ответ: 12. (B)

A 10 **B** 12 **C** 25 **D** 28 **E** 32 **F**

1.4 Боря заметил, что скорый поезд проходит платформу станции длиной 450 метров за 27 секунд и пересекает отметку стоящего рядом километрового столба за 12 секунд. Найдите длину поезда (в метрах), считая, что его скорость остается одной и той же в течение всего времени наблюдения.

A 300 **B** 320 **C** 340 **D** 360 **E** 400 **F**

Ответ: 360. (D)

1.5 Боря заметил, что скорый поезд проходит платформу станции длиной 400 метров за 28 секунд и пересекает отметку стоящего рядом километрового столба за 12 секунд. Найдите скорость поезда (в метрах в секунду), считая, что она остается одной и той же в течение всего времени наблюдения.

A 16 **B** 18 **C** 20 **D** 25 **E** 30 **F**

Ответ: 25. (D)

1.6 Боря заметил, что скорый поезд проходит платформу станции длиной 420 метров за 25 секунд и пересекает отметку стоящего рядом километрового столба за 10 секунд. Найдите длину поезда (в метрах), считая, что его скорость остается одной и той же в течение всего времени наблюдения.

A 180 **B** 200 **C** 220 **D** 240 **E** 280 **F**

Ответ: 280. (E)

2.1 Найдите $f(2013)$, если для любых действительных x и y справедливо равенство

$$f(x-y)=f(x)+f(y)-2xy.$$

Решение. Подставим $x=y=0$. Получим $f(0)=2f(0)+0$, откуда получаем, что $f(0)=0$. Подставим $x=y$. Получаем $0=f(0)=f(x)+f(x)-2x^2$. Откуда $f(x)=x^2$.

Ответ: 4052169. (C) $\square$

A 4044121 **B** 4048144 **C** 4052169 **D** 4056196 **E** 4060225 **F**

2.2 Найдите $f(2012)$, если для любых действительных x и y справедливо равенство

$$f(x+y)=f(x)+f(-y)+2xy.$$

A 4044121 **B** 4048144 **C** 4052169 **D** 4056196 **E** 4060225 **F**

Ответ: 4048144. (B)

2.3 Найдите $f(2014)$, если для любых действительных x и y справедливо равенство

$$f(x-y)=f(x)+f(y)-2xy.$$

A 4044121 **B** 4048144 **C** 4052169 **D** 4056196 **E** 4060225 **F**

Ответ: 4056196. (D)

2.4 Найдите $f(2011)$, если для любых действительных x и y справедливо равенство

$$f(x+y)=f(x)+f(-y)+2xy.$$

A 4044121 **B** 4048144 **C** 4052169 **D** 4056196 **E** 4060225 **F**

Ответ: 4044121. (A)

3-1. Вычислите сумму

$$S=\frac{2014}{2\cdot 5}+\frac{2014}{5\cdot 8}+\frac{2014}{8\cdot 11}+\ldots+\frac{2014}{2012\cdot 2015}.$$

В ответе укажите остаток от деления на 5 четного числа, ближайшего к полученному значению S.

Решение. Так как

$$\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\ldots+\frac{1}{2012\cdot 2015}=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\right)+\ldots\left(\frac{1}{2012}-\frac{1}{2015}\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2015}\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{2013}{2015},$$

то искомая сумма равна

$$\frac{2014\cdot 2013}{6\cdot 2015}=335,33\ldots.$$

Искомое натуральное число равно 336.

Ответ: 1. (B) □

Варианты ответа.

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4 **F**

3-2. Вычислите сумму

$$S=\frac{2013}{2\cdot 6}+\frac{2013}{6\cdot 10}+\frac{2013}{10\cdot 14}+\ldots+\frac{2013}{2010\cdot 2014}.$$

В ответе укажите остаток от деления на 5 четного числа, ближайшего к полученному значению S.

Ответ: 2. (C)

Варианты ответа.

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4 **F**

3-3. Вычислите сумму

$$S=\frac{2014}{3\cdot 7}+\frac{2014}{7\cdot 11}+\frac{2014}{11\cdot 15}+\ldots+\frac{2014}{2011\cdot 2015}.$$

В ответе укажите остаток от деления на 5 натурального числа, ближайшего к полученному значению S.

Ответ: 3. (D)

Варианты ответа.

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4 **F**

3-4. Вычислите сумму

$$S=\frac{2015}{3\cdot 8}+\frac{2015}{8\cdot 13}+\frac{2015}{13\cdot 18}+\ldots+\frac{2015}{2008\cdot 2013}.$$

В ответе укажите остаток от деления на 5 натурального числа, ближайшего к полученному значению S.

Ответ: 4. (E)

Варианты ответа.

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4 **F**

4-1. Окружность касается сторон угла в точках A и B. Расстояние от лежащей на окружности точки C до прямой AB равно 4. Найдите сумму расстояний от точки C до сторон угла, если известно, что одно из этих расстояний в четыре раза больше другого.

Решение. Пусть $\alpha = \angle CAB$, $\beta = \angle CBA$, h_A – расстояние от точки C до стороны угла, проходящей через точку A, h_B — расстояние от точки C до стороны угла, проходящей через точку B, h – расстояние от точки C до прямой AB. Тогда

$$h = AC\sin\alpha = h_A\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad \text{и} \qquad h = BC\sin\beta = h_B\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

Значит, $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \sqrt{\dfrac{h_B}{h_A}}$ и $h = h_A\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \sqrt{h_A h_B}$. По условию задачи, если меньшее из расстояний от точки C до сторон угла обозначить x, то большее расстояние — $4x$. Получаем уравнение

$$4^2 = x\cdot 4x.$$

Откуда $x = 2$ и искомая сумма равна $2 + 4\cdot 2 = 10$.

Ответ: 10. (B)

□

Варианты ответа.

A 5 **B** 10 **C** 12 **D** 15 **E** 18 **F**

4-2. Окружность касается сторон угла в точках A и B. Расстояние от лежащей на окружности точки C до прямой AB равно 6. Найдите сумму расстояний от точки C до сторон угла, если известно, что одно из этих расстояний на 5 больше другого.

Ответ: 13. (C)
Варианты ответа.

A 9 **B** 11 **C** 13 **D** 15 **E** 17 **F**

4-3. Окружность касается сторон угла в точках A и B. Расстояние от лежащей на окружности точки C до прямой AB равно 6. Найдите сумму расстояний от точки C до сторон угла, если известно, что одно из этих расстояний в девять раза меньше другого.

Ответ: 20. (E)
Варианты ответа.

A 10 **B** 12 **C** 15 **D** 18 **E** 20 **F**

4-4. Окружность касается сторон угла в точках A и B. Расстояние от лежащей на окружности точки C до прямой AB равно 8. Найдите сумму расстояний от точки C до сторон угла, если известно, что одно из этих расстояний на 30 меньше другого.

Ответ: 34. (B)
Варианты ответа.

A 32 **B** 34 **C** 36 **D** 38 **E** 40 **F**

5-1. Решите неравенство

$$\sqrt{3x-7} - \sqrt{3x^2-13x+13} \geqslant 3x^2 - 16x + 20.$$

В ответе укажите сумму всех удовлетворяющих неравенству целых значений x.

Решение. В результате замены $v = \sqrt{3x-7}, u = \sqrt{3x^2-13x+13}$ получим равносильное неравенство $u \leqslant v$. Следовательно, x удовлетворяет неравенству $3x^2 - 13x + 13 \leqslant 3x - 7 \iff 2 \leqslant x \leqslant 10/3$. Из двух целых значений $x = 2$ и $x = 3$ в область допустимых значений попадает только $x = 3$.

Ответ: (B) 3. □

Варианты ответа.

A 2 **B** 3 **C** 5 **D** 7 **E** 9 **F**

5-2. Решите неравенство

$$\sqrt{6x-13} - \sqrt{3x^2-13x+13} \geqslant 3x^2 - 19x + 26.$$

В ответе укажите сумму всех удовлетворяющих неравенству целых значений x.

Решение. Неравенству удовлетворяют только следующие целые значения: $x = 3$, $x = 4$.

Ответ: (D) 7. □

Варианты ответа.

A 2 **B** 3 **C** 5 **D** 7 **E** 9 **F**

5-3. Решите неравенство

$$\sqrt{5x-11} - \sqrt{5x^2-21x+21} \geqslant 5x^2 - 26x + 32.$$

В ответе укажите сумму всех удовлетворяющих неравенству целых значений x.

Решение. Неравенству удовлетворяет только одно целое значение: $x = 3$.

Ответ: (B) 3. □

Варианты ответа.

A 2 **B** 3 **C** 5 **D** 7 **E** 9 **F**

5-4. Решите неравенство

$$\sqrt{10x-21} - \sqrt{5x^2-21x+21} \geqslant 5x^2 - 31x + 42.$$

В ответе укажите сумму всех удовлетворяющих неравенству целых значений x.

Решение. Неравенству удовлетворяют только следующие целые значения: $x = 3$, $x = 4$.

Ответ: (D) 7. □

Варианты ответа.

A 2 **B** 3 **C** 5 **D** 7 **E** 9 **F**

6-1. Из трёх математиков и девяти экономистов нужно составить комиссию, в состав которой войдет восемь человек. При этом в ней должен участвовать хотя бы один математик. Сколькими способами может быть составлена комиссия?

Решение. Непосредственный подсчет дает $C_3^3 \cdot C_9^5 + C_3^2 \cdot C_9^6 + C_3^1 \cdot C_9^7 = 486$. Либо можно и так: $C_{12}^8 - C_9^8 = 486$.

Ответ: 486. □

6-2. Из трёх математиков и десяти экономистов нужно составить комиссию, в состав которой войдет семь человек. При этом в ней должен участвовать хотя бы один математик. Сколькими способами может быть составлена комиссия?

Решение. Непосредственный подсчет дает: $C_{13}^7 - C_{10}^7 = 1596$.

Ответ: 1596. □

6-3. Из двенадцати школьников и трёх учителей нужно составить школьный комитет, в состав которого войдет девять человек. При этом в нём должен участвовать хотя бы один учитель. Сколькими способами может быть составлен комитет?

Решение. Непосредственный подсчет дает: $C_{15}^9 - C_{12}^9 = 4785$.

Ответ: 4785. □

6-4. Из одиннадцати школьников и трёх учителей нужно составить школьный комитет, в состав которого войдёт восемь человек. При этом в нём должен участвовать хотя бы один учитель. Сколькими способами может быть составлен комитет?

Решение. Непосредственный подсчет дает: $C_{14}^8 - C_{11}^8 = 2838$.

Ответ: 2838. □

7-1. Найдите делимое, если каждый знак $*$ в приведённой записи деления чисел «в столбик» обозначает какую-либо цифру:

```
********|     ?
***     |***8**
 ***
 ***
  **
  **
   ***
   ***
     0
```

Решение. Цифра 8 в частном даёт промежуточное двузначное произведение, следовательно делитель не может быть больше 12 ($13 \cdot 8 = 104$ — не трёхзначное число). С другой стороны промежуточному трёхзначному произведению может отвечать в частном только цифра 9 (цифра 8 по условию даёт только двузначное произведение), а в этом случае делитель не может быть меньше 12 ($11 \cdot 9 = 99$ — двузначное число. Следовательно, делителем может быть только число 12. Если при промежуточном делении происходит снесение разряда — в частном на соответствующем месте стоит 0.

Поэтому в частном стоит число 909809. Делимое равно $12 \cdot 909809 = 10917708$.

Ответ: 10917708. □

7-2. Найдите делимое, если каждый знак $*$ в приведённой записи деления чисел «в столбик» обозначает какую-либо цифру:

$$\begin{array}{l|l}
******** & ? \\ \cline{2-2}
\underline{***} & ***8** \\
*** & \\
\underline{***} & \\
*** & \\
\underline{***} & \\
** & \\
\underline{**} & \\
*** & \\
\underline{***} & \\
0 &
\end{array}$$

Решение. $11997708 : 12 = 999809$.

Ответ: 11997708. □

7-3. Найдите делимое, если каждый знак $*$ в приведённой записи деления чисел «в столбик» обозначает какую-либо цифру:

$$\begin{array}{l|l}
******** & ? \\ \cline{2-2}
\underline{***} & ***8** \\
*** & \\
\underline{***} & \\
*** & \\
\underline{**} & \\
*** & \\
\underline{***} & \\
*** & \\
\underline{***} & \\
0 &
\end{array}$$

Решение. $10918788 : 12 = 909899$.

Ответ: 10918788. □

7-4. Найдите делимое, если каждый знак $*$ в приведённой записи деления чисел «в столбик» обозначает какую-либо цифру:

$$\begin{array}{l|l}
******** & ? \\ \cline{2-2}
\underline{***} & ***8** \\
*** & \\
\underline{***} & \\
** & \\
\underline{**} & \\
*** & \\
\underline{***} & \\
0 &
\end{array}$$

Решение. $11889708 : 12 = 990809$.

Ответ: 11889708. □

8-1. Найдите все общие точки графиков

$$y = 8\cos\pi x \cdot \cos^2 2\pi x \cdot \cos 4\pi x \qquad \text{и} \qquad y = \cos 9\pi x$$

с абсциссами, принадлежащими отрезку $x \in [0; 1]$. В ответе укажите сумму абсцисс найденных точек.

Решение. Домножим на $\sin\pi x$. Все $x = n$, $n \in \mathbb{Z}$ нужно будет из ответа убрать, т.к. они не являются корнями исходного уравнения. Далее, используя равенство $8\sin\pi x\cos\pi x\cos 2\pi x\cos 4\pi x = \sin 8\pi x$, находим

$$\sin 8\pi x \cdot \cos 2\pi x = \sin\pi x \cdot \cos 9\pi x \Longleftrightarrow$$
$$\sin 10\pi x + \sin 6\pi x = \sin 10\pi x - \sin 8\pi x \Longleftrightarrow$$
$$\sin 6\pi x = \sin(-8\pi x).$$

Откуда $x = k/7$ либо $x = 1/2 + l$, k, $l \in \mathbb{Z}$.

Корни уравнения из отрезка $[0; 1]$ таковы: $1/7$, $2/7$, $3/7$, $4/7$, $5/7$, $6/7$ и $1/2$.

Ответ: $3,5$. □

8-2. Найдите все общие точки графиков

$$y = 8\cos^2\pi x \cdot \cos 2\pi x \cdot \cos 4\pi x \qquad \text{и} \qquad y = \cos 6\pi x$$

с абсциссами, принадлежащими отрезку $[-1; 0]$. В ответе укажите сумму абсцисс найденных точек.

Решение. Равносильно $\sin 9\pi x = \sin(-5\pi x)$, $x \neq n$, $n \in \mathbb{Z}$. Откуда $x = k/7$ либо $x = 1/4 + l/2$, k, $l \in \mathbb{Z}$.

Корни уравнения из отрезка $[-1; 0]$ таковы: $-1/7$, $-2/7$, $-3/7$, $-4/7$, $-5/7$, $-6/7$ и $-1/4$, $-3/4$.

Ответ: -4. □

8-3. Найдите все общие точки графиков

$$y = 8\cos\pi x \cdot \cos 2\pi x \cdot \cos^2 4\pi x \qquad \text{и} \qquad y = \cos 11\pi x$$

с абсциссами, принадлежащими отрезку $[0; 1]$. В ответе укажите сумму абсцисс найденных точек.

Решение. Равносильно $\sin 4\pi x = \sin(-10\pi x)$, $x \neq n$, $n \in \mathbb{Z}$. Откуда $x = k/7$ либо $x = 1/6 + l/3$, k, $l \in \mathbb{Z}$.

Корни уравнения из отрезка $[0; 1]$ таковы: $1/7$, $2/7$, $3/7$, $4/7$, $5/7$, $6/7$ и $1/6$, $1/2$, $5/6$.

Ответ: $4,5$. □

8-4. Найдите все общие точки графиков

$$y = 8\cos\pi x \cdot \cos^2 2\pi x \cdot \cos 4\pi x \qquad \text{и} \qquad y = \cos 5\pi x$$

с абсциссами, принадлежащими отрезку $[-1; 0]$. В ответе укажите сумму абсцисс найденных точек.

Решение. Равносильно $\sin 10\pi x = \sin(-4\pi x)$, $x \neq n$, $n \in \mathbb{Z}$. Откуда $x = k/7$ либо $x = 1/6 + l/3$, k, $l \in \mathbb{Z}$.

Корни уравнения из отрезка $[-1; 0]$ таковы: $-1/7$, $-2/7$, $-3/7$, $-4/7$, $-5/7$, $-6/7$ и $-1/6$, $-1/2$, $-5/6$.

Ответ: $-4,5$. □

9-1. Найдите все положительные a, при которых уравнение

$$\frac{2\pi a + \arcsin(\sin x) + 2\arccos(\cos x) - ax}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = 0$$

имеет ровно три различных решения, принадлежащих множеству $(-\infty; 7\pi]$. В ответе укажите сумму всех найденных a (если таких a не существует, то укажите 0; если число a не целое, то округлите его до сотых).

Решение. Область допустимых значений – $x \in \mathbb{R}\backslash\{\pi/2 + \pi n\}_{n=1}^{+\infty}$. На О.Д.З. решаем уравнение

$$\arcsin(\sin x) + 2\arccos(\cos x) = ax - 2\pi a.$$

Функция

$$f(x) = \arcsin(\sin x) + 2\arccos(\cos x)$$

периодическая с периодом 2π, причём она является линейной на каждом из множеств $[0; \pi/2]$, $[\pi/2; \pi]$, $[\pi; 3\pi/2]$, $[3\pi/2; 2\pi]$. Поскольку

$$f(0) = f(2\pi) = 0, \quad f(\pi/2) = 3\pi/2, \quad f(\pi) = \pi, \quad f(3\pi/2) = \pi/2,$$

то можно теперь построить график функции на всей числовой прямой.

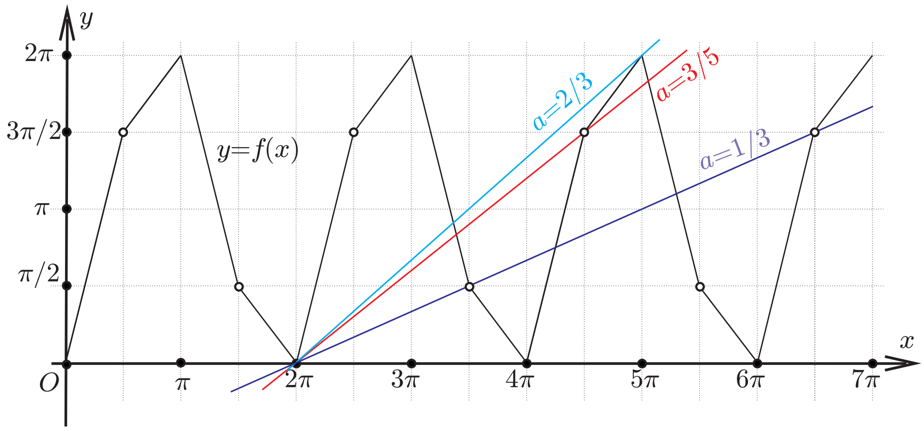

Рис. 1:

График функции $y = a(x - 2\pi)$ представляет собой семейство прямых, проходящих через точку $(2\pi; 0)$.

Далее выбираем те прямые, которые дают три решения из указанного множества. Это значения $a = 1/3$, $a = 2/3$, $a = 3/5$; их сумма равна $1,6$.

Ответ: $1,6$. □

9-2. Найдите все положительные a, при которых уравнение

$$\frac{4\pi a + \arcsin(\sin x) + 3\arccos(\cos x) - ax}{2 + \operatorname{tg}^2 x} = 0$$

имеет ровно три решения. В ответе укажите сумму всех найденных a (если таких a не существует, то укажите 0; если число a не целое, то округлите его до сотых).

Решение. При $a = 1$, $a = 2/3$, $a = 4/5$. Сумма равна $2,4(6)$.

Ответ: $2,47$. □

9-3. Найдите все отрицательные a, при которых уравнение

$$\frac{6\pi a - \arcsin(\sin x) + 2\arccos(\cos x) - ax}{\operatorname{tg}^2 x + 4} = 0$$

имеет ровно три решения, принадлежащих множеству $[\pi; +\infty)$. В ответе укажите сумму всех найденных a (если таких a не существует, то укажите 0; если число a не целое, то округлите его до сотых).

Решение. При $a = -1/3$, $a = -2/3$, $a = -3/5$. Сумма равна $-1,6$.

Ответ: $-1,6$. □

9-4. Найдите все отрицательные a, при которых уравнение

$$\frac{8\pi a - \arcsin(\sin x) + 3\arccos(\cos x) - ax}{3 + \operatorname{tg}^2 x} = 0$$

имеет ровно три решения. В ответе укажите сумму всех найденных a (если таких a не существует, то укажите 0; если число a не целое, то округлите его до сотых).

Решение. При $a = -1$, $a = -2/3$, $a = -4/5$. Сумма равна $-2,4(6)$.

Ответ: $-2,47$. □

10-1. В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Точки P_1, P_2, P_3 принадлежат стороне BC, причем $BP_1 < BP_2 < BP_3 < BC$. Точки Q_1, Q_2, Q_3 принадлежат стороне AD, причем $AQ_1 < AQ_2 < AQ_3 < AD$. Обозначим точки пересечения BQ_1 с AP_1, P_2Q_1 с P_1Q_2, P_3Q_2 с P_2Q_3, CQ_3 с P_3D через R_1, R_2, R_3 и R_4 соответственно. Известно, что сумма объёмов пирамид $SR_1P_1R_2Q_1$ и $SR_3P_3R_4Q_3$ равна 78. Найдите минимальное значение величины

$$V^2_{SABR_1} + V^2_{SR_2P_2R_3Q_2} + V^2_{SCDR_4}.$$

В ответе укажите целое число, наиболее близкое к найденному значению.

Решение. Из свойств трапеции следует, что треугольники (см. рис. 2), закрашенные на рисунке одинаковым цветом, имеют одинаковую площадь. Откуда вытекает равенство сумм площадей, обозначенных

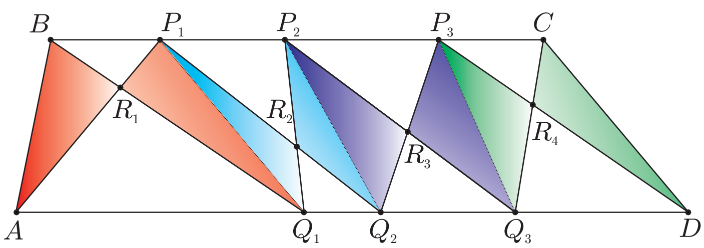

Рис. 2:

одинаковым цветом на рис. 3. Равенство сумм площадей принимает вид

$$S_{ABR_1} + S_{R_2P_2R_3Q_2} + S_{CDR_4} = S_{R_1P_1R_2Q_1} + S_{R_3P_3R_4Q_3}.$$

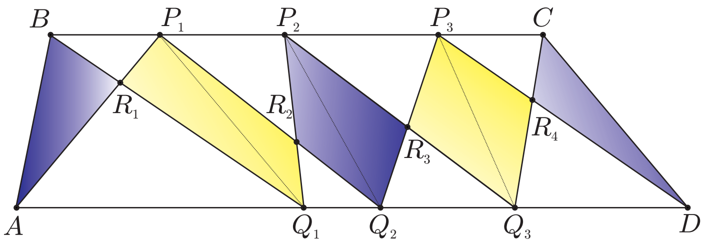

Рис. 3:

Откуда
$$V_{SABR_1} + V_{SR_2P_2R_3Q_2} + V_{SCDR_4} = V_{SR_1P_1R_2Q_1} + V_{SR_3P_3R_4Q_3} = 78.$$

Положим $a_1 = V_{SABR_1}$, $a_2 = V_{SR_2P_2R_3Q_2}$, $a_3 = V_{SCDR_4}$. Из условия задачи: $a_1 + a_2 + a_3 = 78$, ищем $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \to \min$, при условии, что a_1, a_2, a_3 неотрицательны. Справедливо неравенство
$$\left(\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{3}\right)^2 \leqslant \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{3}.$$
Для школьников данное неравенство обосновывается трехкратным применением неравенства $2ab \leqslant a^2 + b^2$. Получаем
$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2}{3} = 2028.$$
Знак равенства достигается, когда $a_1 = a_2 = a_3 = 26$.

Ответ: 2028. □

10-2. В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Точки P_1, P_2, P_3 принадлежат стороне BC, причем $BP_1 < BP_2 < BP_3 < BC$. Точки Q_1, Q_2, Q_3 принадлежат стороне AD, причем $AQ_1 < AQ_2 < AQ_3 < AD$. Обозначим точки пересечения BQ_1 с AP_1, P_2Q_1 с P_1Q_2, P_3Q_2 с P_2Q_3, CQ_3 с P_3D через R_1, R_2, R_3 и R_4 соответственно. Известно, что сумма объёмов пирамид $SR_1P_1R_2Q_1$ и $SR_3P_3R_4Q_3$ равна 96. Найдите минимальное значение величины
$$V_{SABR_1}^2 + V_{SR_2P_2R_3Q_2}^2 + V_{SCDR_4}^2.$$
В ответе укажите целое число, наиболее близкое к найденному значению.

Ответ: 3072.

10-3. В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Точки P_1, P_2, P_3 принадлежат стороне BC, причем $BP_1 < BP_2 < BP_3 < BC$. Точки Q_1, Q_2, Q_3 принадлежат стороне AD, причем $AQ_1 < AQ_2 < AQ_3 < AD$. Обозначим точки пересечения BQ_1 с AP_1, P_2Q_1 с P_1Q_2, P_3Q_2 с P_2Q_3, CQ_3 с P_3D через R_1, R_2, R_3 и R_4 соответственно. Известно, что сумма объёмов пирамид $SR_1P_1R_2Q_1$ и $SR_3P_3R_4Q_3$ равна 111. Найдите минимальное значение величины
$$V_{SABR_1}^2 + V_{SR_2P_2R_3Q_2}^2 + V_{SCDR_4}^2.$$
В ответе укажите целое число, наиболее близкое к найденному значению.

Ответ: 4107.

10-4. В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Точки P_1, P_2, P_3 принадлежат стороне BC, причем $BP_1 < BP_2 < BP_3 < BC$. Точки Q_1, Q_2, Q_3 принадлежат стороне AD, причем $AQ_1 < AQ_2 < AQ_3 < AD$. Обозначим точки пересечения BQ_1 с AP_1, P_2Q_1 с

P_1Q_2, P_3Q_2 с P_2Q_3, CQ_3 с P_3D через R_1, R_2, R_3 и R_4 соответственно. Известно, что сумма объёмов пирамид $SR_1P_1R_2Q_1$ и $SR_3P_3R_4Q_3$ равна 84. Найдите минимальное значение величины

$$V_{SABR_1}^2 + V_{SR_2P_2R_3Q_2}^2 + V_{SCDR_4}^2.$$

В ответе укажите целое число, наиболее близкое к найденному значению.

Ответ: 2352.