Покори Воробьевы горы–2012

Математика

7–9 классы

1. **(7 класс)** На сколько сумма $2^2+4^2+6^2+\ldots+100^2$ больше суммы $1^2+3^2+5^2+\ldots+99^2$?

   Ответ: 5050.

   Решение. $(2^2+4^2+6^2+\ldots+100^2)-(1^2+3^2+5^2+\ldots+99^2)=(2-1)(2+1)+(4-3)(4+3)+\ldots+(100-99)(100+99)=1+2+3+\ldots+99+100=\dfrac{100\cdot101}{2}=5050.$

2. **(7–8 классы)** Каждый житель острова либо рыцарь, всегда говорящий правду, либо лжец, всегда говорящий неправду. Однажды 50 островитян сели за круглый стол и каждый сказал про своего соседа справа, рыцарь тот или лжец. При этом жители, сидящие на 1-м, 3-м, ... и 49-м местах, сказали „Рыцарь", а сидящие на 2-м, 4-м, ... и 48-м местах — „Лжец". Что мог сказать житель, сидящий на 50-м месте? (Места занумерованы по кругу, начиная с некоторого.)

   Ответ: „Рыцарь".

   Решение. Достаточно разобрать два случая, кем был первый — рыцарем или лжецом.

   1) Если первый — рыцарь, то из полученных высказываний получаем цепочку сидящих за столом: РРЛЛРРЛЛРР...: пары рыцарей и лжецов чередуются. Поскольку общее число жителей 50 — не кратно 4, то последний является рыцарем и про первого он должен сказать честно, то есть назвать рыцарем.

   2) Если первый — лжец, то аналогично получаем цепочку чередующихся пар лжецов и рыцарей, в которой первый и последний — лжецы, так что опять ответ последнего — „Рыцарь".

3. **(7–8 класс)** Вася задумал 5 натуральных чисел и назвал Пете все их попарные суммы (в каком–то порядке): 122, 124, 126, 127, 128,129, 130, 131, 132,135. Помогите Пете определить наименьшее из задуманных Васей чисел. *Ответ:* 60.

   Решение. Сложив все 10 попарных сумм получим сумму всех 5 чисел, умноженную на 4, т.к. каждое число участвует в ней ровно 4 раза. $122+124+126+127+128+129+130+131+132+135=1284=4S$, следовательно, $S=321$. Сумма двух самых маленьких чисел равна 122, а сумма двух самых больших — 135, значит третье по величине число равно $321-122-135=64$. Заметим, что число 124 может быть получено только как сумма наименьшего и третьего по величине, т.е. наименьшее число равно 124-64 $=60$.

4. В прямоугольном треугольнике длины всех сторон являются натуральными числами, при этом один из катетов равен 2012.
   а) **(7 класс)** Найдите хотя бы один такой треугольник.
   б) **(8–9 классы)** Найдите все такие треугольники. *Ответ:* б) (2012, 253005, 253013); (2012, 506016, 506020) (2012, 1012035, 1012037) и (2012, 1509, 2515).

   Решение.

   Решим уравнение $x^2+2012^2=y^2$ в натуральных числах. $2012^2=y^2-x^2=(y-x)\cdot(y+x)$. Разложим на простые множители $2012^2=2^4\cdot503^2$. Заметим, что $y-x<y+x$ и эти два числа ($x+y$ и $y-x$) должны быть оба четными. Т.е. двойки должны присутствовать в разложении обоих чисел. Кроме того, 503 должно присутствовать в первом числе в первой или второй степени. Получаем следующие варианты:
   $\begin{cases}y+x=503^2\cdot2\\ y-x=2^3\end{cases}$; $\begin{cases}y+x=503^2\cdot2^2\\ y-x=2^2\end{cases}$; $\begin{cases}y+x=503^2\cdot2^3\\ y-x=2\end{cases}$; $\begin{cases}y+x=503\cdot2^3\\ y-x=503\cdot2\end{cases}$;

   Решая полученные системы получаем ответы: (253005, 253013); (506016,506020) (1012035, 1012037) и (1509, 2515).

5. **(7–8 класс)** Мария Ивановна — строгая учительница по алгебре. Она ставит в журнал только двойки, тройки и четверки, причем никогда не ставит одному ученику две двойки подряд. Известно, что она поставила Вовочке 6 оценок за четверть. Сколькими различными способами она могла это сделать? *Ответ:* 448 способов.

   Решение. Обозначим a_n — количество способов поставить n оценок. Несложно заметить, что $a_1=3$, $a_2=8$. Заметим, что 3 или 4 она может поставить после любой отметки, а 2, только если перед этим стояло 3 или 4. Таким образом набор длины n можно получить, приписав 3 или 4 к набору длины

$n-1$ или приписав 32 или 42 к набору длины $n-2$, откуда получаем рекуррентное соотношение $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$. Отсюда легко находится, что $a_3 = 22$, $a_4 = 60$, $a_5 = 164$, $a_6 = 448$.

6. **(7–8 класс)** На плоскости Oxy построить треугольник $\triangle ABC$, так, что координаты вершин A, B, C – целые числа и выполнены следующие два условия:
a) $S(\triangle ABC) < 1$;
b) $AB > 2$, $BC > 2$ и $AC > 2$.

Ответ: Например, $A(0,0)$, $B(2,3)$, $C(3,5)$.

Решение. Надо подобрать такой треугольник, чтобы внутри не было ни одной точки с целыми координатами, тогда, по формуле Пика его площадь будет $1/2$.

7. **7–8 класс** Отличник Коля нашел сумму цифр у всех чисел от 0 до 2012 и сложил их все. Какое число у него получилось? *Ответ:* 28077.

Решение. Заметим, что числа 0 и 999, 1 и 998, ... , 499 и 500 дополняют друг друга до 999, т.е. сумма их сумм цифр равна 27. Сложив их суммы цифр, получим 27x500=13500. Сумма цифр чисел от 1000 до 1999 по аналогичным соображениям равна 14500 (здесь мы учли, что у каждого числа появилась дополнительная единица, поэтому сумма увеличилась на тысячу). Остались числа 2000, 2001, ...2012, их сумма цифр равна 77. Итого, получим 13500+14500+77=28077.

8. **(8–9 класс)** Сколькими способами можно поставить цифры от 1 до 9 вместо букв, так, чтобы все неравенства выполнялись? $\begin{array}{ccccc} a & > & b & > & c \\ \vee & & \vee & & \vee \\ d & > & e & > & f \\ \vee & & \vee & & \vee \\ g & > & h & > & i \end{array}$ *Ответ:* 42 способа.

Решение. Заметим сразу, что $a = 9$, $i = 1$. На месте b и d могут стоять числа, такие, что существует 5 чисел меньших их, т.е. там могут стоять только 6,7,8. Аналогично, на месте f и h могут стоять только числа 2,3,4. Заметим, что 8 может стоять только на месте b или d. Рассмотрим случаи, когда $b = 8$, потом их количество умножим на 2 (из соображений симметрии). На месте d тогда стоит 7 или 6. Рассмотрим случай, когда $d = 7$. Если $f = 2$, $h = 3$ или, наоборот, $f = 3$, $h = 2$, то оставшиеся числа можно ставить в любом порядке — получаем 6+6 вариантов. Если $f = 2$, $h = 4$ или, наоборот, $f = 4$, $h = 2$, то 3 можно поставить только над (соответственно, слева) от числа 2. Получаем еще 2+2 варианта. Случай $f = 3$, $h = 4$ или наоборот невозможен. Итак, получаем для $d = 7$ всего 16 вариантов.

Допустим теперь, что $d = 6$. Тогда $c = 7$. Если $f = 2$, $h = 3$ или, наоборот, $f = 3$, $h = 2$, то оставшиеся числа можно ставить в любом порядке — получим 2+2 варианта. Из остальных случаев возможен только такой, когда $f = 4$, $h = 2$ — еще один вариант. Итого получаем 5 вариантов.

Сложив с предыдущими вариантами и умножив на 2 получаем 42 варианта.

9. **(8–9 класс)** Сравните числа $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{2012}{2013!}$ и 1. ($n!$ обозначает произведение $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$)

Ответ: Первое число меньше.

Решение. Заметим, что $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$. При сложении внутренние слагаемы сократятся, останется $1 - \frac{1}{2013!}$.

10. **(9 класс)** На стороне DE правильного 6–угольника $ABCDEF$ выбрана точка K, такая, что прямая AK делит площадь 6–угольника в отношении 3:1. В каком отношении точка K делит сторону DE? *Ответ:* 3:1.

Решение. Не ограничивая общности можно считать, что $S(ABCDEF) = 6$. Заметим, что тогда площади треугольников ABC и AEF равны 1, а площади треугольников ACD и ADE — 2. Обозначив через $x = DK : DE$, получим, что $S(\triangle ADK) = 2x$, $S(\triangle AEK) = 2(1-x)$, откуда, $3 + 2x = 3(1 + 2(1-x))$. Решая, получим $x = 3/4$. Следовательно, $DK : KE = 3/4 : 1/4 = 3 : 1$.

11. **(9 класс)** Сколькими способами можно выписать в ряд числа 1,2,3,4,5,6 так, чтобы для любых трех подряд идущих чисел a, b, c величина $ac - b^2$ была кратна 7? *Ответ:* 12.

Решение. Каждый следующий член будет получаться из предыдущего умножением на некоторую фиксированную величину (по модулю 7). В качестве этой величины можно брать только 3 или 5. А первый член — любой, значит всего 12 вариантов.

12. **(9 класс)** Найдите все возрастающие арифметические прогрессии натуральных чисел, в которых для любого натурального n произведение первых n членов делит произведение следующих n членов (с $n+1$ по $2n$).

Ответ: $k, 2k, 3k, \ldots$, $k \in \mathbb{N}$.

Решение. 1. Разделим данную прогрессию на НОД всех её членов и получим снова прогрессию, удовлетворяющую условию, скажем, $a, a+d, \ldots$, в которой $(a, d) = 1$ и $d \geq 1$. Так как по условию (при $n = 1$) $a \mid a + d$, то $a \mid d$ и $a = 1$.

2. Далее из условия (при $n = 2$) имеем:

$$a(a+d) \mid (a+2d)(a+3d) \Longrightarrow d+1 \mid 2d^2 = 2(d+1)^2 - 4(d+1) + 2 \Longrightarrow d = 1.$$

3. Из целочисленности биномиальных коэффициентов следует, что прогрессия $1, 2, 3, \ldots$ удовлетворяет условию. С учётом пункта 1 получаем ответ.

13. **(9 класс)** Среди значений функции

$$f(x) = \frac{(x^2+1)^2}{x(x^2-1)}$$

найдите те, которые она принимает наибольшее число раз?

Ответ: $(-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$.

Решение. Искомые значения — в точности те a, при которых наибольшее число корней имеет уравнение

$$f(x) = a \iff (x^2+1)^2 - ax(x^2-1) = 0 \; (\Rightarrow x \neq 0, \pm 1) \iff (x^2-1)^2 - ax(x^2-1) + 4x^2 = 0 \iff$$

$$\iff \phi_a(t) := t^2 - at + 4 = 0, \text{ где } t = \frac{x^2-1}{x}.$$

Поскольку уравнение $t = \dfrac{x^2-1}{x} \iff x^2 - tx - 1 = 0$ при любом t имеет ровно два корня, то исходное уравнение имеет наибольшее (равное 4) число корней в точности тогда, когда трёхчлен ϕ_a имеет два корня, т. е. при $a^2 - 16 > 0 \iff |a| > 4$.