Информатика 10-11 класс **1 вариант**

Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

1. Двое играют в игру на доске $2 \times n$. Первому игроку принадлежит нижняя полоса из n клеток, второму - верхняя. За ход можно поставить новую пешку на любую свободную клетку, которая принадлежит активному игроку, либо срубить пешку противника, если текущая расстановка позволяет это сделать. Проигрывает игрок, который не может сделать ход.
Поясним, как могут рубить пешки. Пусть первая координата нижней полосы равняется 0, а первая координата верхней равняется 1. Если пешка первого игрока стоит на клетке $(0, x)$, то она может срубить своим ходом фигуру, которая стоит на $(1, x-1)$ или на $(1, x+1)$ при условии, что эти клетки существуют и на них стоят фигуры противника. При этом пешка занимает позицию фигуры, которую она срубила. Аналогично, пешка второго игрока на клетке $(1, x)$, может рубить клетки $(0, x-1)$ и $(0, x+1)$.
    a. Кто выигрывает при правильной игре, если n = 4?
    b. Кто выигрывает при правильной игре при произвольном n?

2. Есть числа x_0 и n. Обозначим за $y_i = gcd(n, x_i)$ при $i \geq 0$ и $x_i = x_{i-1} + y_{i-1}$ при $i \geq 1$, где $gcd(a, b)$ - наибольший общий делитель a и b.
    a. **Какие значения принимает последовательность y при $x_0 = 1$ и $n = 9$?**
    b. **При каких x_0 и n может быть так, что y_i равняется n при каком-то i?**

3. Есть поле $3n \times 3$, составленное из n квадратов 3×3, в каждом из которых отсутствует центральная клетка. На этом поле можно размещать доминошки 1×2 и 2×1 так, чтобы они полностью лежали на поле.
    a. Сколько способов замостить такое поле доминошками 1×2 при $n = 1$?
    b. Сколько способов замостить такое поле доминошками 1×2 при $n = 2$?
    c. Сколько способов замостить такое поле доминошками 1×2 при $n = 2023$?

4. Вершины в графе - числа от 1 до 2022. Вес ребра между вершинами a и b - это $a \; xor \; b$. Найдите кратчайшее расстояние между вершиной 1 и вершиной 2022.
Напоминаем, что xor двух чисел вычисляется следующим образом: оба числа переводятся в двоичную систему, в результирующем числе на i-ой позиции в двоичной записи стоит 1 тогда и только тогда, когда значения i-ых битов операндов (то есть тех чисел, xor которых мы считаем) различаются. Например$7_{10} \; xor \; 5_{10} = 111_2 \; xor \; 101_2 = 010_2 = 2_{10}$

5. Есть функция f, которая превращает символы “a” и “b” в некоторые строки:
$$f(\text{“}a\text{”}) = \text{“}abb\text{”};$$
$$f(\text{“}b\text{”}) = \text{“}baa\text{”};$$
Результат применения f к строке, состоящей из нескольких символов - это результат последовательного выписывания посимвольных применений этой функции. То есть $f(\text{“}ab\text{”}) = f(\text{"}a\text{"})f(\text{"}b\text{"}) = \text{“}abbbaa\text{”}$;
Рассмотрим строку $S_0 = \text{“}a\text{”}$. Определим $S_k = f(S_{k-1})$ при $k > 0$. Например, $S_1 = \text{“}abb\text{”}$, $S_2 = \text{“}abbbaabaa\text{”}$.
    a. **Докажите, что S_{k-1} является префиксом S_k.**
    b. **Рассмотрим S - результат бесконечного последовательного применения функции f к S**
    c. **Сколько различных подстрок длины 5 содержится в S?**
    d. **Сколько различных подстрок длины 1000 содержится в S?**