Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задача 1

Двое играют в игру на доске $2 \times n$. Первому игроку принадлежит нижняя полоса из n клеток, второму - верхняя. За ход можно поставить новую пешку на любую свободную клетку, которая принадлежит активному игроку, либо срубить пешку противника, если текущая расстановка позволяет это сделать. Проигрывает игрок, который не может сделать ход.
Поясним, как могут рубить пешки. Пусть первая координата нижней полосы равняется 0, а первая координата верхней равняется 1. Если пешка первого игрока стоит на клетке $(0, x)$, то она может срубить своим ходом фигуру, которая стоит на $(1, x-1)$ или на $(1, x+1)$ при условии, что эти клетки существуют и на них стоят фигуры противника. При этом пешка занимает позицию фигуры, которую она срубила. Аналогично, пешка второго игрока на клетке $(1, x)$, может рубить клетки $(0, x-1)$ и $(0, x+1)$.

1. Кто выигрывает при правильной игре, если n = 3?
2. Кто выигрывает при правильной игре при произвольном n?

Решение
Рассмотрим сразу случай произвольного натурального n. Покажем, что у второго всегда есть выигрышная стратегия. Для того, чтобы второму победить нужно делать симметричные первому ходы. Таким образом, если первый игрок ставит пешку на клетку $(0, x)$, то второй должен поставить на клетку $(1, x)$, если эта клетка не занята пешкой первого игрока (далее мы покажем, что такая ситуация невозможна). Рассмотрим теперь первое взятие, первым пешку соперника срубит первый игрок, так как до этого игроки просто ставили пешки. Без ограничения общности пусть у первого игрока есть пешка $(0, x)$ и он собирается срубить пешку $(1, x + 1)$ — из этого следует, что так же у первого игрока стоит пешка $(0, x + 1)$, иначе бы второй игрок не поставил пешку на $(1, x + 1)$, а также у второго игрока есть пешка $(1, x)$, так как в какой-то момент первый игрок поставил пешку $(0, x)$ и клетка $(1, x)$ была свободна, так как до этого не было взятий и следовательно её своим ходом занял второй игрок.
Получаем, что игрок пешкой $(0, x)$ срубил пешку $(1, x + 1)$ и занял её место, в этом случае второй игрок пешкой $(1, x)$ срубит пешку $(0, x + 1)$. Клетки $(0, x)$ и $(1, x)$ у обоих игроков освободятся, так как оба игрока провели взятие этими пешками. На клетке $(0, x + 1)$ окажется пешка второго игрока и на клетке, а на клетке $(1, x + 1)$ окажется пешка первого игрока. Заметим, что эти пешки больше не могут производить взятие и не могут быть взяты, это следует из описания возможных ходов, а также не позволяют поставить на них какие-либо пешки, назовем такую пару клеток *неинтересной*. Получается, что после первого взятия у игроков образуется пара клеток, которые больше не участвуют в игре, а в остальном ситуация остается симметричной: второй игрок по прежнему может повторить следующий ход первого. Так как оба игрока не могут взаимодействовать с пешками, находящимися на паре *неинтересной* паре клеток, после каждого хода второго игрока, любая пара противоположных клеток, либо свободна, либо занята пешками игроков. Таким образом получаем, что второй игрок всегда может, либо занять клетку напротив той, в которую только что поставил пешку первый игрок, либо произвести взятие, образовав пару неинтересных *клеток*.
Покажем, что игра заканчивается. С каждым взятием количество клеток доступных для взаимодействия уменьшается на 2. Также заметим, что когда какая-то пара клеток окружена *неинтересными* клетками, то для любого из игроков пешки на этих клетках не могут сделать ход. Так как каждый ход происходит либо размещение пешек, либо взятие, а игровое поле конечно, то количество *неинтересных* пар клеток не убывает. Действительно, размещение пешек не уменьшает это количество, а взятие увеличивает на 1. Так как игровое поле конечно, то через какое-то количество ходов все пары клеток, во-первых, будут либо *неинтересными,* либо будут заняты пешками игроков, а соседние пары клеток будут *неинтересными* (если это не так, то первый игрок может произвести взятие, что приведёт к образованию новой *неинтересной* пары).

Таким образом, игра при данной стратегии заканчивается и на любой ход первого игрока найдётся ход второго игрока. Получаем, что последний ход сделает второй игрок, а значит первый проиграет.

Критерии оценивания

- Первый пункт можно было решить полным перебором всевозможных игр, разборы частных случаев оценивались в 0 баллов.
- Просто ответы, без каких-либо обоснований, оценивались в 0 баллов.
- Решение на полный балл должно было не только содержать упоминание симметричной стратегии, а также обоснование того, что ход второго всегда возможен. В случае отсутствия хоть какого-то описание того, что такое симметричная стратегия, решение оценивались в 0 баллов.
- Также решение должно иметь обоснование того, почему игра заканчивается и заканчивается победой второго игрока. Отсутствие данных рассуждений штрафовалось, как максимум, в 7 баллов.
- Если первый пункт опирался на некорректное доказательство второго пункта, то оба пункта оценивались в 0 баллов.

Жюри не отрицает существование других выигрышных стратегий, но большинство решений, получивших 0 баллов, либо не описывали, что делает второй игрок в случае взятия его пешки, либо пользовались необоснованными предположениями о том, что первому игроку выгодно играть именно так, как они описывают. Выигрышная стратегия должна описывать стратегию второго игрока на любую стратегию первого игрока, или обосновывать почему первому игроку невыгодно играть тем или иным способом (что на самом деле и подразумевает, описание того, как второй игрок выигрывает в этом случае).

Задача 2

Рассмотрим последовательности из 0 и 1 длины n с ровно k подстроками 01.
Например, для $n = 3$ и $k = 1$ такими последовательностями являются *001, 010, 011, 101.*

1. **Сколько существует таких последовательностей для n = 5 и k = 2?**

Решение
Данный пункт можно было решить полным перебором 32 вариантов. Этот перебор можно было оптимизировать различными способами, например, заметив, что у нас должно быть две подстроки 01 и ещё какое-то число.

Ответ: 6 последовательностей. 00101, 10101, 01001, 01101, 01011, 01010

Критерии оценки
За приведение последовательностей без пояснений ставилось 1 баллов.
За численный ответ без пояснений ставилось 0 баллов.

2. **Сколько существует таких последовательностей для n = 2022 и k = 255?**

Решение
Заметим, что любая подходящая последовательность выглядит следующим образом:
- В начале последовательности содержится некоторое, возможно нулевое, количество единиц, так как они не влияют на количество подстрок 01. Будем называть эти единицы *стартовыми*.
- Далее идёт $2k$ непустых чередующихся блоков из последовательных 0 и 1.
- В конце последовательности содержится некоторое, возможно нулевое, количество 0, так как они не влияют на количество подстрок 01. Будем называть эти нули *конченными*.

Покажем, что любая подходящая последовательность выглядит таким образом.
Рассмотрим любую подходящую последовательность, если она содержит суффикс из 0 или префикс из 1, выкинем их. Теперь наша последовательность начинается с некоторого количества чередующихся блоков 0 и 1. Заметим, что подстроку 01 образует конец какого-то блока из 0 и начало какого-то блока из 1. Это значит что блоков из 0 и 1 одинаковое количество. Так как нас интересуют только последовательности с ровно k подстроками 01, получаем, что количество блоков 0 равняется количеству блоков 1 и равняется k. Таким образом любая подходящая последовательность состоит из $2k$ непустых чередующихся блоков 0 и 1, и возможно некоторого количества *стартовых* 1 и некоторого количества *конечных* 0.
Аналогичным образом можно показать, что любая последовательность подходящая под это описание также содержит ровно k подстрок 01.

Посчитаем количество таких строк.
Рассмотрим последовательность из $n + 1$ шарика и выберем среди них $2k + 1$.
Давайте покажем, что исходная задача эквивалентна данной.

Для начала покажем, как мы из исходного объекта можем построить второй объект.
У нас есть последовательность из 0 и 1 длины n. Давайте добавим один ноль в конец. Заметим, что вид последовательности при этом не изменился. Укажем шарики, которые мы будем выбирать. Давайте рассмотрим все блоки из 0 и 1, кроме *стараторых* единиц и отметим шарики с индексами, которые соответствуют началам этих блоков. Таких блоков будет ровно $2k + 1$, так как в нашей последовательности существовало $2k$ непустых блока, а *конечные* нули мы сделали непустыми при дописывании 0.
Также заметим, что из различных последовательностей мы будем получать различные выборы шариков. Для этого достаточно рассмотреть первый отличающийся символ этих последовательностей. Нетрудно показать, что в этот момент в одной из последовательностей

закончился очередной блок. А значит множество индексов начал блоков будет различаться для этих последовательностей, то есть мы выберем различные шары.

Теперь покажем, как имея выбранные $2k+1$ шарик среди $n+1$ построить исходную последовательность. Рассуждения в данном пункте аналогичны рассуждениям в предыдущем пункте в обратном порядке. Рассмотрим множество индексов выбранных шариков. Генерируем последовательность длины $n+1$ по описанным выше правилам и отрежем последний символ.

Доказательство того факта, что из различных выборов шаров мы будем получать различные последовательности аналогично доказательству предыдущего пункта. Искушенные читатели могут проверить это самостоятельно.

Таким образом мы получаем, что множество искомых объектов содержит столько же объектов, сколько и множество выборов шаров $2k+1$ среди $n+1$.

Количество таких объектов мы можем рассчитать по формуле количества сочетаний, то есть $C_{n+1}^{2k+1} = \frac{(n+1)!}{(2k+1)!(n-2k)!}$.

Критерии оценки
- За факт об общем виде такой последовательности могли ставиться баллы вплоть до трети от максимального балла за подпункт.
- Некоторые решения рассматривали различные случаи разбиения множества последовательностей на непересекающиеся множества и считали размеры этих множеств. Такие решение оценивались индивидуально в зависимости от строгости рассуждений.
- Разбор частных случаев не считался доказательством и оценивался в 0 баллов.

Задача 3

Вася очень любит числа. В этот раз он решил складывать все подстроки какого-то фиксированного числа.
Например, сумма подстрок числа 123 равна $123 + 12 + 23 + 1 + 2 + 3 = 164$

1. **Существует ли число, для которого эта сумма равна 21?**

Решение
Да, существует. Для числа 15 искомое значение как раз равно 21 (15 + 1 + 5).

Критерии оценки
В этом пункте достаточно было привести пример такого числа. За него ставилось 3 балла.

2. **Существует ли число, для которого такая сумма равна 2022?**

Решение
Рассмотрим некоторое натуральное число x. Будем обозначать сумму подстрок числа как $f(x)$.
Заметим, что $f(x) \geq x$. Действительно, само число входит в сумму его подстрок, а значит эта сумма не меньше самого числа.
Из этого можно сделать вывод, что наше число точно меньше 2023.

Предположим, что искомое число является трёхзначным. Тогда пусть $x = \underline{abc}$, где a, b и c - цифры, $1 \leq a \leq 9$ и $0 \leq b, c \leq 9$.
В этом случае $f(x) = \underline{abc} + \underline{ab} + \underline{bc} + a + b + c = 111a + 22b + 3c$, что не больше, чем $(111 + 22 + 3) * 9 = 136 * 9 < 2000$. Но итоговая сумма равна 2022, а значит наше предположение было неверным.

Для двухзначных и однозначных чисел можно произвести аналогичные рассуждения.
Итого получаем, что наше число не меньше 1000 и не больше 2023.
То есть $x = \underline{abcd}$, $1 \leq a \leq 9$ и $0 \leq b, c, d \leq 9$. Сумма же принимает вид: $f(x) = \underline{abcd} + \underline{abc} + \underline{bcd} + \underline{ab} + \underline{bc} + \underline{cd} + a + b + c + d =$
$$= 1111a + 222b + 33c + 4d = 2022$$
Заметим, что если $a = 2$, то $f(x)$ уже больше, чем 2022. Значит, $a = 1$ и
$$1111 + 222b + 33c + 4d = 2022$$
$$222b + 33c + 4d = 911$$

Исходя из ограничений на цифры, можно сделать вывод, что $0 \leq 33c + 4d \leq 333$

А значит и $578 \leq 222b \leq 911 \Rightarrow 3 \leq b \leq 4$.
Разберём оба этих случая. Пусть $b = 3$. Тогда $33c + 4d = 245$.
$$0 \leq 4d \leq 36 \Rightarrow 209 \leq 33c \leq 245 \Rightarrow c = 7 \Rightarrow 4d = 14$$
Последнее равенство не имеет решения в целых числах, а значит наше предположение не верно.
Пусть $b = 4$. Тогда $33c + 4d = 23$. Очевидно, что в этом случае $c = 0$, но тогда $4d = 23$ не имеет решения в натуральных числах.

Получаем, что такого числа не существует.

Критерии оценки
Корректные решения оценивались в 17 баллов.

За неточности в решении, которые не сильно повлияли на ход рассуждений, жюри могло снимать произвольное количество баллов.
Среди таких неточностей, например:
- отсутствие доказательства того, что нам достаточно рассмотреть четырехзначные числа
- арифметические ошибки
- недостаточные обоснования ограничений на ту или иную цифру числа

Ответ без доказательства оценивался в 0 баллов.

Отдельно хочется разобрать частое решение:
Заметим, что для некоторого конкретного числа y *значение* $f(y) < 2022$, *но при этом* $f(y + 1) > 2022$. *Из этого можно сделать вывод, что искомого числа не существует*

Такое решение не является корректным, так как для этого данная функция от числа должна обладать некоторыми свойствами. Без доказательства каких-то свойств такие решения оценивались в 0 баллов.

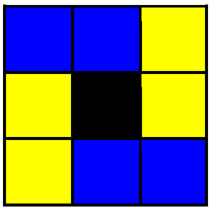
Задача 4

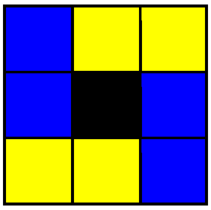
Есть поле $3n \times 3$, составленное из n квадратов 3×3, в каждом из которых отсутствует центральная клетка. На этом поле можно размещать доминошки 1×2 и 2×1 так, чтобы они полностью лежали на поле.

1. Сколько способов замостить такое поле доминошками 1×2 и 2×1 при $n = 1$?
2. Сколько способов замостить такое поле доминошками 1×2 и 2×1 при $n = 2$?
3. Сколько способов замостить такое поле доминошками 1×2 и 2×1 при $n = 2022$?

Решение

$$n = 1$$

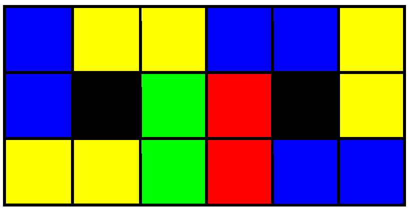


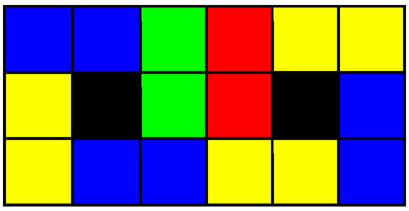


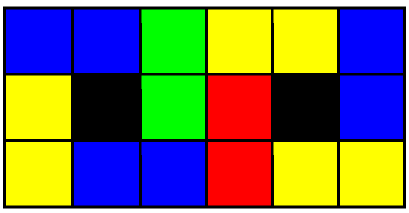
Ответ: Два способа, так как у нас есть два способа замостить левый верхний угол, а остальные доминошки раскладываются однозначно.

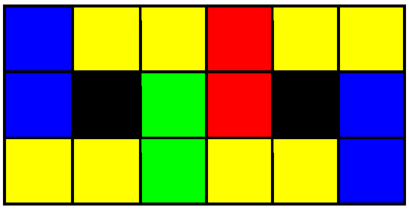
$$n = 2$$

Заметим, что есть четыре способа разместить доминошки в квадратах таким образом, чтобы они не пересекали границы квадратов. Это верно потому, что для каждого из квадратов есть два способа их заполнить и они заполняются независимо.

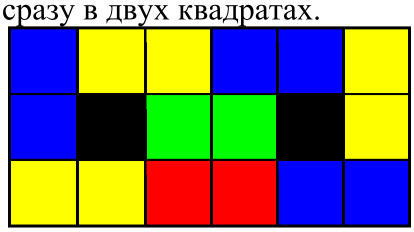


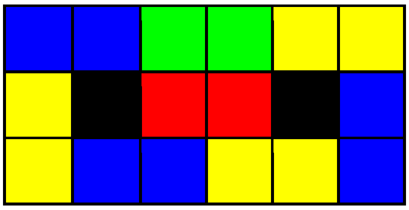






Заметим, что можно получить еще два способа, если в первых двух способах повернуть зеленую и красную доминошки на 90 градусов. Эти способы мы еще не учли, так как в них доминошки лежат сразу в двух квадратах.





Заметим, что других способов нет, так как остальные доминошки заполняются однозначно, а одна или три доминошки не могут лежать сразу в двух квадратах, потому что, например в первом квадрате останется нечетное количество клеточек, которое нельзя замостить доминошками.

Ответ: 6 способов

Рассмотрим теперь общий случай.
Предположим, что мы умеем вычислять некоторую функцию $f(n)$ — количество способов замостить доминошками описанное поле размеров $3n \times 3$. Так, например, $f(1) = 2$, $f(2) = 6$. Мы хотим научиться вычислять $f(n + 1)$ зная значение $f(i)$ для $i \leq n$.

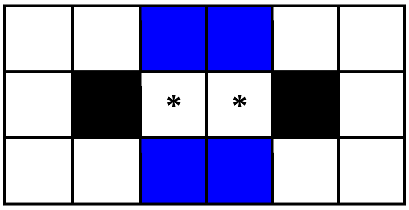
Давайте рассмотрим какое-нибудь корректное замощение и посмотрим как оно могло получиться. Возможны два непересекающихся случая:

1. У квадратов с номерами n и $n + 1$ нет общих доминошек, тогда квадрат с номером n должен быть замощен. Обозначим через $g_1(x)$ количество таких замощений, если последний квадрат имеет номер x . Заметим, что для любого корректного замощения, учтенного в $f(n)$ существует ровно два способа замостить квадрат с номером $n + 1$, это следует из того, что замощение квадрата с номером $n + 1$ никак не зависит от предыдущего, а сам квадрат можно замостить двумя способами (первый пункт задачи). Таким образом, $g_1(x) = 2 \cdot f(x - 1)$ и $g_1(1) = 1$.
2. У квадратов с номерами n и $n + 1$ есть общие доминошки. Обозначим через $g_2(x)$ количество таких замощений, если последний квадрат имеет номер x. Также заметим, что $g_2(1) = 0$, так как у первого квадрата нет предыдущего, а значит его таким образом замостить нельзя.

Получим рекуррентную формулу для второго случая.
Рассмотрим квадрат с номером x. Он должен иметь общие доминошки с квадратом $x + 1$. Покажем, что их может быть ровно две и одна из них обязательно должна быть центральной.

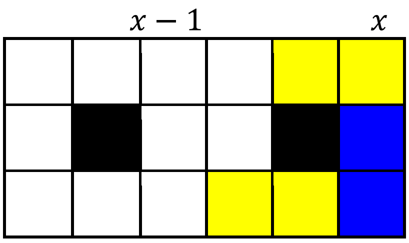
1) 0 общих доминошек быть не может, так как это противоречит определению функции $g_2(x)$
2) 1 и 3 общих доминошки быть не может, так как в этом случае в квадрате $x + 1$ остается нечетное количество свободных клеток, а значит мы не сможем его замостить.

3) В случае, если общие доминошки (отмечены синим) располагаются следующим образом:

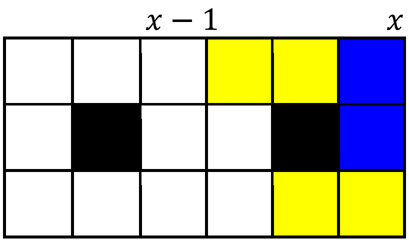


Получаем, что центральные клетки (отмеченные *) мы можем замостить только ещё одной общей доминошкой, а значит этот случай сводится к случаю с тремя общими доминошками. Таким образом, хотя бы одна из общих доминошек должна располагаться на помеченных клетках.

Таким образом, если такие замощения и возможны, то они выглядят только описанным выше способом. Рассмотрим какое-то замощение из $f(x - 1)$.



При дописывании справа ещё одного квадрата мы можем заменить синюю доминошку на две горизонтальных, получим какое-то корректное замощение из $g_2(x + 1)$. Так как мы покрыли две каких-то клетки квадрата $x + 1$, то все остальные доминошки размещаются однозначно. Аналогичные рассуждения применимы и в следующем случае:



Получаем, что для каждого корректного расположения доминошек из $f(x)$ мы получаем ровно одно замощение для $g_2(x + 1)$.
Получаем, что $g_2(n) = 1 \cdot f(n - 1) = f(n-1)$, и $g_2(n) = 0$.

Так как случаи не пересекаются, то $f(n) = g_1(n) + g_2(n) = 2 \cdot f(n-1) + f(n - 1) = 3 \cdot f(n-1)$, при этом $f(1) = g_1(1) + g_2(1) = 2 + 0 = 2$.

Осталось решить это рекуррентное соотношение, чтобы получить формулу в замкнутом виде. Заметим, например, посчитав первые несколько значений по рекуррентной формуле, что $f(n) = 2 \cdot 3^{n-1}$ и докажем это утверждение по индукции.

База индукции выполняется: $f(1) = 2 * 3^{1-1} = 2 * 3^0 = 2$
Предположении индукции: пусть для всех $i \leq k$ выполняется $f(i) = 2 \cdot 3^{i-1}$

Шаг индукции: $f(k+1) = 3 \cdot f(k) = 3 \cdot 2 \cdot 3^{k-1} = 2 \cdot 3^{k-1+1} = 2 \cdot 3^{k}$ — мы применили предположение индукции, когда заменили $f(k)$ на $2 \cdot 3^{k-1}$.

Можно было также получить замкнутый вид данного рекуррентного соотношения рассуждая примерно следующим образом: $f(n) = 3 \cdot f(n-1) = 3 \cdot 3 \cdot f(n-2) = 3 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 3 \cdot f(1) = \prod_{i=2}^{n-1} 3 \cdot 2 = 2 \cdot 3^{n-1}$

Ответ: $2 \cdot 3^{2022}$

Критерии оценки

- Для получения полного балла по первым двум пунктам было достаточно перечислить каким-либо способом всевозможные способы размещения.
- Решения третьего пункта, содержащие только конечную формулу без доказательства (в том числе, если просто разобраны несколько значений n) оценивались в 0 баллов.
- Отсутствие доказательства факта об общих доминошках штрафовалось на треть баллов от стоимости подпунктов.
- Отсутствие замкнутой формулы. Если формула в ответе представляла из себя рекуррентное соотношение, либо бесконечную сумму, то такое решение штрафовалось на треть баллов от стоимости подпункта.
- Прочие неточности в доказательстве оценивались на усмотрение жюри.
- Возможны и другие решения данной задачи, они оценивались жюри в индивидуальном порядке в зависимости от полноты доказательства и его корректности.

Задача 5

Рассмотрим неориентированный граф, состоящий из N вершин, вершины пронумерованы от 1 до N. Ребро между вершинами A и B проведено тогда и только тогда, когда $A\ xor\ B\ =\ A\ +\ B$.

Напоминаем, что xor двух чисел вычисляется следующим образом: оба числа переводятся в двоичную систему, в результирующем числе на i-ой позиции в двоичной записи стоит 1 тогда и только тогда, когда значения i-ых битов операндов (то есть тех чисел, xor которых мы считаем) различаются. Например$7_{10}\ xor\ 5_{10}\ =\ 111_2\ xor\ 101_2\ =\ 010_2\ =\ 2_{10}$

1. **Посчитайте количество ребер в таком графе для $N\ =\ 8$.**

Решение

В данном пункте было достаточно описать каким-либо образом предоставить все ребра данного графа (изобразив сам граф или просто списком ребер) и предоставить какое-либо обоснование. Например, можно было выписать все числа от 1 до 8 в двоичной системе счисления и сказать, что условие ребра выполняется тогда, когда на не существует позиции в двоичной системе счисления у двух чисел, на которой находятся одновременно две единицы.

Для получения полного балла по этому подпункту доказательство данного факта не требовалось, так как в общем виде оно здесь не нужно, но оно пригодится нам в следующих подпунктах, поэтому приводим его здесь.

Лемма

Рассмотрим два каких-то числа в двоичной системе и какой-то бит с номером i, если в каком-то из чисел такого бита нет, дополним его нулями слева, данная операция не изменит число. Рассмотрим все возможные ситуации:

- На i-ой позиции в каждом числе стоит 0, тогда в результате, и сложения, и операции xor на позиции i будет стоять 0. При этом переноса в следующий разряд при сложении происходить не будет.
- Биты на i-ых позициях различаются. Тогда в i-ой позиции обоих операций будет стоять 1. При этом переноса в следующий разряд при сложении происходить не будет.
- На i-ой позиции в каждом числе стоит 1. Тогда в i-ой позиции обоих операций будет стоять 0, но при этом при сложении произойдет перенос в следующий разряд, что приведёт, к инвертированию следующего бита, чего при xor не произойдёт. Так как без учета переноса при любых значениях битов в позиции $i+1$ результаты суммы и xor совпадают, при инвертировании этого бита значение суммы в этом разряде изменится на отличное от значения xor.

Таким образом получаем, что для того, чтобы $A\ xor\ B\ =\ A\ +\ B$, нужно чтобы на соответствующих позициях в двоичной записи этих чисел одновременно не стояли 1.

Ответ: 13

2. ***Эйлеровым циклом*** **в графе называется такой цикл, который содержит все ребра графа по одному разу. Для каких N в графе существует эйлеров цикл?**

Решение

Эйлеров цикл существует, тогда и только тогда, когда граф связный (за исключением может быть вершин степени 0) и в графе все вершины имеют четную степень.

Докажем, что в данном графе эйлерова цикла существовать не может при $N\ >\ 1$. Для этого рассмотрим максимальную степень 2 такую, что она не превосходит N, обозначим это число за X.

Покажем, что вершина со степенью X имеет нечетную степень.
Для этого заметим, что эта вершина не может быть соединена ни с какой вершиной Y такой, что $Y > X$. Действительно, из того, что X — это максимальная степень 2 такая, что она не превосходит N, следует что для любого такого $Y > X$ у них совпадает старший бит в двоичной записи этих чисел (иначе бы X не являлся наибольшей степенью 2 не превосходящей N), а значит $A\ xor\ B \neq A + B$, так как это бит при xor обнулится.

Теперь рассмотрим все такие числа $W < X$. Покажем, что число X соединено с каждым таким числом. $X = 2^{k} \Rightarrow 10 \cdots k$ штук $\cdots 0_2$, Любое $W < X$ в двоичной записи содержит как максимум k цифр, на $k + 1$ стоит 0, таким образом любой значащий разряд в W при xor с X будет соответствовать 0 на соответствующей позиции в числе X, что по лемме приводит к тому, что $X\ xor\ W = X + W$, что и означает, что между этими вершинами будет проведено ребро.

Давайте посчитаем степень вершины X, мы получили, что она соединена со всеми числами от 1 до $X = 2^k - 1$, таких чисел ровно $(2^k - 1) - 1 + 1 = 2^k - 1$, а это число нечетное. Получаем, что в данном графе всегда есть хотя бы одна вершина нечетной степени, отсюда вытекает, что эйлерова цикла в данном графе не может быть ни при каком N, кроме $N = 1$.

3. ***Эйлеровым путём*** **в графе называется такой путь, который содержит все ребра графа по одному разу. Для каких** N **в графе существует эйлеров путь?**

Эйлеров путь в графе существует тогда и только тогда, когда как максимум две вершины графа имеют нечетную степень. При этом граф связный (за исключением может быть вершин степени 0).

В предыдущем подпункте мы показали, что в данном графе при любом N существует хотя бы одна вершина с нечетной степенью. *По лемме о рукопожатиях, количество вершин графа с нечетной степенью четно*. Значит в данном графе существует ещё хотя бы одна вершина с нечетной степенью.

Найдем эту вершину, для этого опять рассмотрим такую вершину X, что она является наибольшей степенью 2 не превосходящей N. Рассмотрим вершину с номером $X - 1 = 1 \cdots\ k$ штук $\cdots 1_2$. Рассмотрим все такие числа $Y > X$, их длина $k + 1$, для любого числа $Y > X$ среди битов с номерами от 1 до k существует хотя бы одна 1, если они все одновременно обращаются в 0, то $X = Y > X$, что неверно. А так как на всех значащих разрядах числа $X - 1$ стоят 1, то по лемме получаем, что $(X - 1)\ xor\ Y \neq (X - 1) + Y$.

Аналогично для чисел $W < X - 1$ все значащие биты одновременно не обращаются в 0 (иначе $W = 0$, а вершины с таким номером нет), получаем что $W\ xor\ (X - 1) \neq W + (X - 1)$.

Рассмотрим вершины X и $X - 1$, они соединены ребром по лемме, так как на первых k позициях числа X стоят 0, а начиная с позиции $k + 1$ в числе $X - 1$ стоят 0.

Таким образом в любом таком графе существует как минимум две вершины нечетной степени. Если для какого-то N мы найдем ещё хотя бы одну вершину нечетной степени, то для такого N в графе не существует эйлерового пути.

Рассмотрим какие-нибудь две вершины $Y_2 > Y_1 \geq X \geq 4$, они не могут быть соединены ребром, так как у них старший бит равен 1. Пусть $Y_2 = X + 1$, эта вершина может быть соединена только с какими-то из чисел W, такими что $W < X$.

Посчитаем количество таких чисел. Заметим, что все биты равные 1 мы обязаны заменить на 0, в том числе и старший (отсюда автоматически следует, что мы рассматриваем только $W < X$), а для каждого нуля существует два варианта: либо заменить его на 1, либо не заменять (при этом нельзя все нули оставить без изменения, так как в этом случае получим, что $W = 0$). Обозначим за y_0 — количество нулевых битов в двоичной записи Y_2, мы можем выбрать любое подмножество таких битов и инвертировать их, кроме пустого подмножества, способов сделать это $2^{y_0} - 1$, а это число нечетное, так как $Y_2 > X \geq 4 = 100_2 \Rightarrow X + 1 \Rightarrow 101_2 \Rightarrow 2^{y_0} > 1$. Получаем, что вершина Y_2 имеет нечетную степень. Таким образом, при $N > 3$, если существует вершина $X + 1$, то в таком графе нет эйлерова пути. Осталось рассмотреть случай, когда $X = N > 1$, иными словами, когда N является степенью двойки большей 1.

Для любой вершины W, такой что $W < N - 1$ рассмотрим её двоичную запись, аналогично рассуждениям выше, чтобы получить какую-то смежную вершину мы обязаны все биты равные 1 заменить на 0, заметим, что при этом заменится старший бит, значит число только уменьшится из чего следует, что вершина с таким номером точно существует. Любое подмножество нулевых битов, кроме пустого (иначе попадем в 0) мы можем оставить нулями, либо заменить каждый бит из этого подмножества на 1. Таких вершин ровно $2^{w_0} - 1$, где w_0 — количество значащих 0 в двоичной записи W. Но помимо этого вершина W также соединена с N, по доказанному выше. Отсюда получаем, что у произвольной вершины W степень вычисляется по формуле $2^{w_0} - 1 + 1 = 2^{w_0}$, а это четное число. Таким образом в данном графе ровно две вершины нечетной степени N и $N - 1$, осталось показать что граф является связным.

Это утверждение для случая $N = X$ очевидно, так как мы уже доказали, что все вершины меньшие X соединены с N. А значит в этом графе есть эйлеров путь

При $N = 3$ в графе только одно ребро, между вершинами 1 и 2, а вершина 3 изолированная, а значит имеет степень $0 \Rightarrow$ в этом графе есть эйлеров путь.

При $N = 1$ в графе нет ребер $\Rightarrow$ эйлеров путь существует.

Ответ: При $N = 2^{k}$ для $k \geq 1$ и при $N \in \{1, 3\}$

Критерии оценивания:

- Если в пункте с эйлеровым циклом не был рассмотрен случай с $N = 1$ баллы не снимались.
- За приведение фактов, которые выделены курсивом, но без общей схемы решения баллы не ставились.
- Каждый пункт рассматривался в зависимости от полноты доказательства на усмотрение жюри.
- За ответ без каких-либо обоснований баллы не ставились.
- При отсутствии полного решение за рассмотрение вершины с номером наибольшей степени двойки, которая меньше N, и какие-то корректные выводы связанные с ней ставились символические баллы.

Примечание от жюри

- Первый пункт был введен для того, чтобы подтолкнуть участников к рассмотрению степеней двоек в решении последующих подпунктов.
- В условии задачи было опущено, что граф не содержит кратных ребер. Решения первого подпункта, которые этого не учитывали, а в остальном были корректны засчитывались на полный балл. Решений второго подпункта, которые использовали бы это не было.
- Утверждения, выделенные *курсивом,* не требовалось доказывать, так как это известные теоремы и леммы теории графов.