Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

1. Двое играют в игру на доске $2 \times n$. Первому игроку принадлежит нижняя полоса из n клеток, второму - верхняя. За ход можно поставить новую пешку на любую свободную клетку, которая принадлежит активному игроку, либо срубить пешку противника, если текущая расстановка позволяет это сделать. Проигрывает игрок, который не может сделать ход.
   Поясним, как могут рубить пешки. Пусть первая координата нижней полосы равняется 0, а первая координата верхней равняется 1. Если пешка первого игрока стоит на клетке $(0, x)$, то она может срубить своим ходом фигуру, которая стоит на $(1, x - 1)$ или на $(1, x + 1)$ при условии, что эти клетки существуют и на них стоят фигуры противника. При этом пешка занимает позицию фигуры, которую она срубила. Аналогично, пешка второго игрока на клетке $(1, x)$, может рубить клетки $(0, x - 1)$ и $(0, x + 1)$.
   a. Кто выигрывает при правильной игре, если n = 4?
   b. Кто выигрывает при правильной игре при произвольном n?

Решение

Рассмотрим сразу случай произвольного натурального n. Покажем, что у второго всегда есть выигрышная стратегия. Для того, чтобы второму победить нужно делать симметричные первому ходы. Таким образом, если первый игрок ставит пешку на клетку $(0, x)$, то второй должен поставить на клетку $(1, x)$, если эта клетка не занята пешкой первого игрока (далее мы покажем, что такая ситуация невозможна). Рассмотрим теперь первое взятие, первым пешку соперника срубит первый игрок, так как до этого игроки просто ставили пешки. Без ограничения общности пусть у первого игрока есть пешка $(0, x)$ и он собирается срубить пешку $(1, x + 1)$ — из этого следует, что так же у первого игрока стоит пешка $(0, x + 1)$, иначе бы второй игрок не поставил пешку на $(1, x + 1)$, а также у второго игрока есть пешка $(1, x)$, так как в какой-то момент первый игрок поставил пешку $(0, x)$ и клетка $(1, x)$ была свободна, так как до этого не было взятий и следовательно её своим ходом занял второй игрок.

Получаем, что игрок пешкой $(0, x)$ срубил пешку $(1, x + 1)$ и занял её место, в этом случае второй игрок пешкой $(1, x)$ срубит пешку $(0, x + 1)$. Клетки $(0, x)$ и $(1, x)$ у обоих игроков освободятся, так как оба игрока провели взятие этими пешками. На клетке $(0, x + 1)$ окажется пешка второго игрока и на клетке, а на клетке $(1, x + 1)$ окажется пешка первого игрока. Заметим, что эти пешки больше не могут производить взятие и не могут быть взяты, это следует из описания возможных ходов, а также не позволяют поставить на них какие-либо пешки, назовем такую пару клеток *неинтересной*. Получается, что после первого взятия у игроков образуется пара клеток, которые больше не участвуют в игре, а в остальном ситуация остается симметричной: второй игрок по прежнему может повторить следующий ход первого. Так как оба игрока не могут взаимодействовать с пешками, находящимися на паре *неинтересной* паре клеток, после каждого хода второго игрока, любая пара противоположных клеток, либо свободна, либо занята пешками игроков. Таким образом получаем, что второй игрок всегда может, либо занять клетку напротив той, в которую только что поставил пешку первый игрок, либо произвести взятие, образовав пару неинтересных *клеток*.

Покажем, что игра заканчивается. С каждым взятием количество клеток доступных для взаимодействия уменьшается на 2. Также заметим, что когда какая-то пара клеток окружена *неинтересными* клетками, то для любого из игроков пешки на этих клетках не могут сделать ход. Так как каждый ход происходит либо размещение пешек, либо взятие, а игровое поле конечно, то количество *неинтересных* пар клеток не убывает. Действительно, размещение пешек не уменьшает это количество, а взятие увеличивает на 1. Так как игровое поле конечно, то через какое-то количество ходов все пары клеток, во-первых, будут либо *неинтересными,* либо будут заняты пешками игроков, а соседние пары клеток будут *неинтересными* (если это не так, то первый игрок может произвести взятие, что приведёт к образованию новой *неинтересной* пары).

Таким образом, игра при данной стратегии заканчивается и на любой ход первого игрока найдётся ход второго игрока. Получаем, что последний ход сделает второй игрок, а значит первый проиграет.

Критерии оценивания

- Первый пункт можно было решить полным перебором всевозможных игр, разборы частных случаев оценивались в 0 баллов.
- Просто ответы, без каких-либо обоснований, оценивались в 0 баллов.
- Решение на полный балл должно было не только содержать упоминание симметричной стратегии, а также обоснование того, что ход второго всегда возможен. В случае отсутствия хоть какого-то описание того, что такое симметричная стратегия, решение оценивались в 0 баллов.
- Также решение должно иметь обоснование того, почему игра заканчивается и заканчивается победой второго игрока. Отсутствие данных рассуждений штрафовалось, как максимум, в 7 баллов.
- Если первый пункт опирался на некорректное доказательство второго пункта, то оба пункта оценивались в 0 баллов.

Жюри не отрицает существование других выигрышных стратегий, но большинство решений, получивших 0 баллов, либо не описывали, что делает второй игрок в случае взятия его пешки, либо пользовались необоснованными предположениями о том, что первому игроку выгодно играть именно так, как они описывают. Выигрышная стратегия должна описывать стратегию второго игрока на любую стратегию первого игрока, или обосновывать почему первому игроку невыгодно играть тем или иным способом (что на самом деле и подразумевает, описание того, как второй игрок выигрывает в этом случае).

2. Есть числа x_0 и n. Обозначим за $y_i = gcd(n, x_i)$ при $i \geq 0$ и $x_i = x_{i-1} + y_{i-1}$ при $i \geq 1$, где $gcd(a, b)$ - наибольший общий делитель a и b.
   a. **Какие значения принимает последовательность y_i при $x_0 = 1$ и $n = 9$?**

Решение

Давайте найдем несколько первых элементов последовательности.

	0	1	2	3	4
x	1	2	3	6	9
y	1	1	3	3	9

Теперь заметим, что $gcd(n, x)$ может принимать значения только 1, 3 и 9, так как $n = 9$.
Покажем, что и все дальнейшие (после четвертого) элементы последовательности y_i равны 9.
База индукции
Как мы видим $y_4 = 9$.
Предположение индукции
Пусть для некоторого i выполняется указано выше утверждение, то есть $y_i = 9$. Тогда и $y_{i+1} = 9$.
Шаг индукции
Из того, что $y_i = 9$ следует также, что x_i делится на 9.
Так как $x_{i+1} = x_i + y_i$ и каждое из слагаемых в правой части делится на 9, то и левая часть делится на 9. Исходя из этого и ограничению на значения членов последовательности y получаем, что $y_{i+1} = 9$.

Критерии оценки

За выписанную последовательность без доказательства ставился 1 балл.

Доказательства, в которых была приведена подобная схема рассуждений, но не использовался факт об ограниченности НОД оценивались в 2 балла. (вместе с последовательностью 3 балла)

Решения, которые приводили последовательность и указывали на допустимое множество значений искомой последовательности оценивались в 2 балла. (вместе с последовательностью 3 балла)

   b. **При каких x_0 и n может быть так, что y_i равняется n при каком-то i?**

Решение

Заметим, что последовательность y_i может принимать значения только из множества делителей числа n по определению. Также заметим, что это множество конечно.
Давайте докажем, что эта последовательность не убывает.

Рассмотрим произвольное y_k и покажем, что $y_k \leq y_{k+1}$. Для этого заметим, что x_k по определению делится на y_k. Тогда $x_{k+1} = x_k + y_k$. Заметим, что оба слагаемых в правой части делятся на y_k. Значит, что и x_{k+1} делится на y_k. А так как по определению и n делится на y_k, то $y_{k+1} = gcd(x_{k+1}, n)$ тоже делится на y_k. Таким образом $y_k \leq y_{k+1}$.

У нас есть бесконечная последовательность y_i, которая не убывает и имеет конечное количество значений, которые она может принимать. Из этого можно сделать вывод, что было конечное количество индексов последовательности, когда она начинала принимать какое-то новое значение, которое не встречалось до этого элемента.
Рассмотрим последний такой момент. Возможно два случая:

1. В этот момент последовательность достигла n.

2. Последовательность достигла некоторого $y_k \neq n$ и далее не изменялась (исходя из выбора y_k).
   В этом случае рассмотрим $x_k = y_k \cdot a$ и $n = y_k \cdot b$, где a, b - некоторые натуральные числа. По построению и выбору k имеем $x_{k+m} = x_k + y_k \cdot m = y_k(a + m)$.
   Введем обозначение $r \ = \ n \ - \ (a \, mod \, n)$ и рассмотрим значение $x_{k+r} = y_k(a - \ (a \, mod \, n) \ + \ n)$. Очевидно, что значение второго множителя кратно n. Тогда $gcd(x_{k+r}, n) \ = \ n$, но $y_k \neq n$. Мы пришли к противоречию, а значит этот случай не возможен. (Замечание: нам достаточно было выбрать произвольное m, такое что $a + m$ кратно n)

Получается, что для произвольных натуральных x_0 и n мы в какой-то момент получим $y_k = n$.

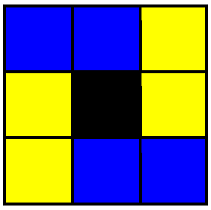
Критерии оценки
В задаче явно не сказано, что речь идёт про натуральные числа x_0 и n. Упоминания (а также их отсутствие) других случаев в решениях никак не оценивалось.

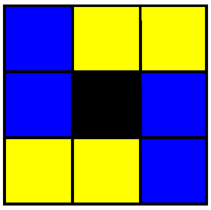
Возможны и другие решения данной задачи. Чаще приводились именно они. Корректные решения оценивались в максимальный балл.

3. Есть поле $3n \times 3$, составленное из n квадратов 3×3, в каждом из которых отсутствует центральная клетка. На этом поле можно размещать доминошки 1×2 и 2×1 так, чтобы они полностью лежали на поле.
   a. Сколько способов замостить такое поле доминошками 1×2 при $n = 1$?
   b. Сколько способов замостить такое поле доминошками 1×2 при $n = 2$?
   c. Сколько способов замостить такое поле доминошками 1×2 при $n = 2023$?

Решение

$$n = 1$$

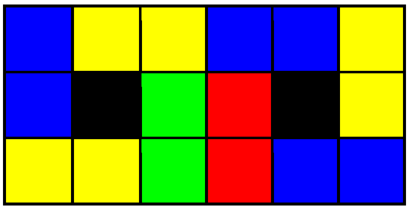


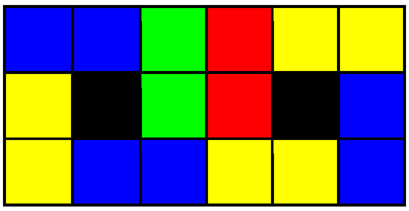


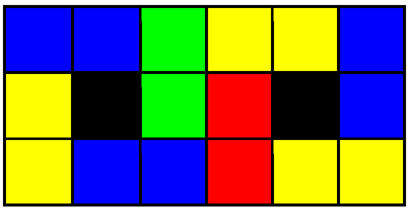
Ответ: Два способа, так как у нас есть два способа замостить левый верхний угол, а остальные доминошки раскладываются однозначно.

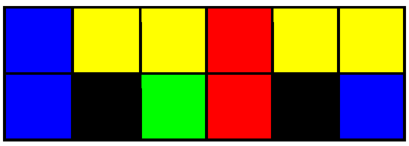
$$n = 2$$

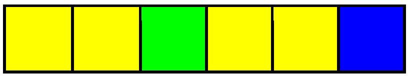
Заметим, что есть четыре способа разместить доминошки в квадратах таким образом, чтобы они не пересекали границы квадратов. Это верно потому, что для каждого из квадратов есть два способа их заполнить и они заполняются независимо.



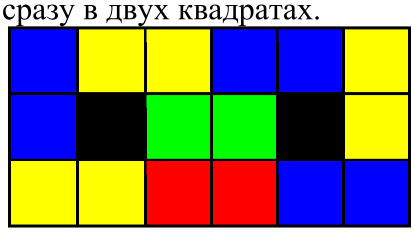


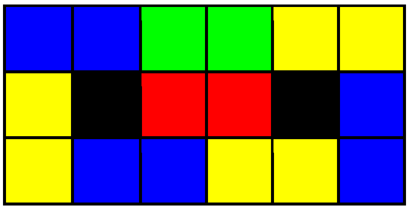






Заметим, что можно получить еще два способа, если в первых двух способах повернуть зеленую и красную доминошки на 90 градусов. Эти способы мы еще не учли, так как в них доминошки лежат сразу в двух квадратах.





Заметим, что других способов нет, так как остальные доминошки заполняются однозначно, а одна или три доминошки не могут лежать сразу в двух квадратах, потому что, например в первом квадрате останется нечетное количество клеточек, которое нельзя замостить доминошками.

Ответ: 6 способов

Рассмотрим теперь общий случай.
Предположим, что мы умеем вычислять некоторую функцию $f(n)$ — количество способов замостить доминошками описанное поле размеров $3n \times 3$. Так, например, $f(1) = 2$, $f(2) = 6$. Мы хотим научиться вычислять $f(n+1)$ зная значение $f(i)$ для $i \leq n$.

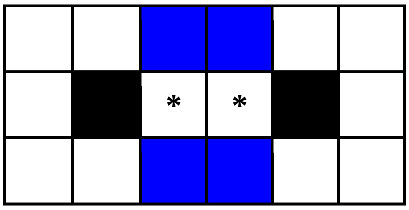
Давайте рассмотрим какое-нибудь корректное замощение и посмотрим как оно могло получиться. Возможны два непересекающихся случая:

1. У квадратов с номерами n и $n+1$ нет общих доминошек, тогда квадрат с номером n должен быть замощен. Обозначим через $g_1(x)$ количество таких замощений, если последний квадрат имеет номер x . Заметим, что для любого корректного замощения, учтенного в $f(n)$ существует ровно два способа замостить квадрат с номером $n+1$, это следует из того, что замощение квадрата с номером $n+1$ никак не зависит от предыдущего, а сам квадрат можно замостить двумя способами (первый пункт задачи). Таким образом, $g_1(x) = 2 \cdot f(x-1)$ и $g_1(1) = 1$.
2. У квадратов с номерами n и $n+1$ есть общие доминошки. Обозначим через $g_2(x)$ количество таких замощений, если последний квадрат имеет номер x. Также заметим, что $g_2(1) = 0$, так как у первого квадрата нет предыдущего, а значит его таким образом замостить нельзя.

Получим рекуррентную формулу для второго случая.
Рассмотрим квадрат с номером x. Он должен иметь общие доминошки с квадратом $x+1$. Покажем, что их может быть ровно две и одна из них обязательно должна быть центральной.

1) 0 общих доминошек быть не может, так как это противоречит определению функции $g_2(x)$
2) 1 и 3 общих доминошки быть не может, так как в этом случае в квадрате $x+1$ остается нечетное количество свободных клеток, а значит мы не сможем его замостить.

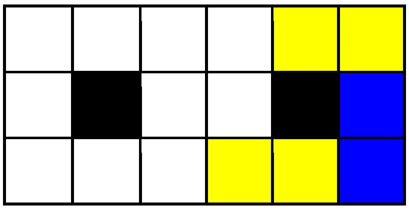
3) В случае, если общие доминошки (отмечены синим) располагаются следующим образом:



Получаем, что центральные клетки (отмеченные *) мы можем замостить только ещё одной общей доминошкой, а значит этот случай сводится к случаю с тремя общими доминошками. Таким образом, хотя бы одна из общих доминошек должна располагаться на помеченных клетках.

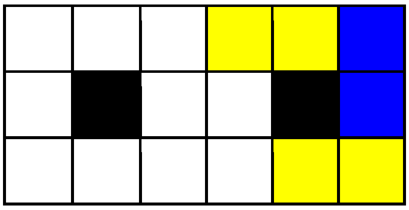
Таким образом, если такие замощения и возможны, то они выглядят только описанным выше способом. Рассмотрим какое-то замощение из $f(x - 1)$.

$x - 1$ x



При дописывании справа ещё одного квадрата мы можем заменить синюю доминошку на две горизонтальных, получим какое-то корректное замощение из $g_2(x + 1)$. Так как мы покрыли две каких-то клетки квадрата $x + 1$, то все остальные доминошки размещаются однозначно. Аналогичные рассуждения применимы и в следующем случае:

$x - 1$ x



Получаем, что для каждого корректного расположения доминошек из $f(x)$ мы получаем ровно одно замощение для $g_2(x + 1)$.
Получаем, что $g_2(n) = 1 \cdot f(n - 1) = f(n-1)$, и $g_2(n) = 0$.

Так как случаи не пересекаются, то $f(n) = g_1(n) + g_2(n) = 2 \cdot f(n-1) + f(n - 1) = 3 \cdot f(n-1)$, при этом $f(1) = g_1(1) + g_2(1) = 2 + 0 = 2$.

Осталось решить это рекуррентное соотношение, чтобы получить формулу в замкнутом виде. Заметим, например, посчитав первые несколько значений по рекуррентной формуле, что $f(n) = 2 \cdot 3^{n-1}$ и докажем это утверждение по индукции.

База индукции выполняется: $f(1) = 2 * 3^{1-1} = 2 * 3^0 = 2$
Предположении индукции: пусть для всех $i \le k$ выполняется $f(i) = 2 \cdot 3^{i-1}$
Шаг индукции: $f(k + 1) = 3 \cdot f(k) = 3 \cdot 2 \cdot 3^{k-1} = 2 \cdot 3^{k-1+1} = 2 \cdot 3^k$ — мы применили предположение индукции, когда заменили $f(k)$ на $2 \cdot 3^{k-1}$.

Можно было также получить замкнутый вид данного рекуррентного соотношения рассуждая примерно следующим образом: $f(n) = 3 \cdot f(n - 1) = 3 \cdot 3 \cdot f(n-2) = 3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3 \cdot f(1) = \prod_{i=2}^{n-1} 3 \cdot 2 = 2 \cdot 3^{n-1}$

Ответ: $2 \cdot 3^{2022}$

Критерии оценки

- Для получения полного балла по первым двум пунктам было достаточно перечислить каким-либо способом всевозможные способы размещения.
- Решения третьего пункта, содержащие только конечную формулу без доказательства (в том числе, если просто разобраны несколько значений n) оценивались в 0 баллов.
- Отсутствие доказательства факта об общих доминошках штрафовалось на треть баллов от стоимости подпунктов.
- Отсутствие замкнутой формулы. Если формула в ответе представляла из себя рекуррентное соотношение, либо бесконечную сумму, то такое решение штрафовалось на треть баллов от стоимости подпункта.
- Прочие неточности в доказательстве оценивались на усмотрение жюри.

Возможны и другие решения данной задачи, они оценивались жюри в индивидуальном порядке в зависимости от полноты доказательства и его корректности.

4. Вершины в графе - числа от 1 до 2022. Вес ребра между вершинами a и b - это $a\ xor\ b$. Найдите кратчайшее расстояние между вершиной 1 и вершиной 2022.
   Напоминаем, что xor двух чисел вычисляется следующим образом: оба числа переводятся в двоичную систему, в результирующем числе на i-ой позиции в двоичной записи стоит 1 тогда и только тогда, когда значения i-ых битов операндов (то есть тех чисел, xor которых мы считаем) различаются. Например$7_{10}\ xor\ 5_{10}\ =\ 111_2\ xor\ 101_2\ =\ 010_2\ =\ 2_{10}$

Решение

Обозначим за $x[i]$ - i-ый бит в двоичной записи числа x, который соответствует i-ой степени двойки.

Введем нотацию $[x]$, где x — некоторое логическое утверждение. В случае, если x — истинно, $[x]$ принимает значение 1, в противном случае оно принимает значение 0. Например, $[2\ =\ 2]\ \cdot\ 3\ =\ 1\ \cdot\ 3\ =\ 1$ и $[5\ -\ \text{четное число}]\ \cdot 3\ =\ 0\ \cdot 3\ =\ 0$.

Вспомогательное утверждение:

Пусть каждое из чисел a и b содержит не более k бит в двоичной записи. Тогда $a\ xor\ b\ =\ \sum_{i=0}^{k-1}\ 2^i \cdot [a[i]\ \neq\ b[i]]$. Доказательство этого утверждения мы оставим читателям в качестве упражнения. Например можно начать с побитового вычисления xor.

Рассмотрим произвольный путь из 1 в 2022. Пусть мы посетили вершины $v_1, v_2, \ldots, v_n$, где первая и последняя вершины - это 1 и 2022 соответственно. Тогда его длина равна $S\ =\ v_1 xor\ v_2\ +\ v_2 xor\ v_3 + \ldots + v_{n-1} xor\ v_n = \sum_{i=2}^{n}\ v_{i-1} xor\ v_i = \sum_{i=2}^{n}\ \sum_{k=0}^{10}\ 2^k\ \cdot [v_{i-1}[k] \neq v_i[k]]$.

Учитывая это, а также тот факт, что длина в двоичной система счисления всех номеров вершин в графе не превосходит 11, то получаем, что

$$S\ = \sum_{i=2}^{n}\ v_{i-1} xor\ v_i = \sum_{i=2}^{n}\ \sum_{k=0}^{10}\ 2^k\ \cdot [v_{i-1}[k] \neq v_i[k]]$$

Можно поменять порядок суммирования, тем самым разбивая сумму по каждому биту:

$$S\ = \sum_{k=0}^{10}\ \sum_{i=2}^{n}\ 2^k \cdot [v_{i-1}[k]\ \neq\ v_i[k]]$$

При фиксированном k получаем, что вклад соответствующего бита будет равен 2^k умноженному на количество изменений значения этого бита в нашей последовательности.

Давайте найдём множество битов, которые различаются для начала пути и конца пути. Очевидно, что для таких битов хотя бы раз произошло изменение значения в последовательности.

Нетрудно показать, что это все биты, которые есть в числе 2023.

Таким образом длина нашего пути не меньше, чем 2023.

Существует тривиальный пример такого пути. Нужно просто пройтись по одному ребру от 1 до 2022.

Критерии оценки

Пример без доказательства оценивался в 0 баллов.

Оценка подобных решений производилась исходя из присутствия следующих частей

- утверждение о том, что мы можем рассматривать биты независимо
- показано влияние различий бита в пути на общую стоимость пути
- аккуратно найдена нижняя оценка длины

- если оценка никаким образом не помогает найти пример, то такое решение могло оцениваться вплоть до 0 баллов
- есть пример

Существуют и другие решения данной задачи. Они оценивались индивидуально.

5. Есть функция f, которая превращает символы “a” и “b” в некоторые строки:

$$f(“a”) = “abb”;$$
$$f(“b”) = “baa”;$$

Результат применения f к строке, состоящей из нескольких символов - это результат последовательного выписывания посимвольных применений этой функции. То есть $f(“ab”) = f("a")f("b") = “abbbaa”$;

Рассмотрим строку $S_0 = “a”$. Определим $S_k = f(S_{k-1})$ при $k > 0$. Например, $S_1 = “abb”$, $S_2 = “abbbaabaa”$.

a. **Докажите, что S_{k-1} является префиксом S_k.**

Решение

Перед тем, как перейти к решению данного пункта полезно доказать, что $f(x + y) = f(x) + f(y)$ для произвольных строк. Действительно, давайте просто применим функцию в левой и правой части и как-то аккуратно сравним символы результатов.

Воспользуемся методом математической индукции.
База индукции очевидна.
Пусть для некоторого $k = n$ утверждение верно. Докажем, что и для $k = n + 1$ оно будет верным. $S_k = S_{k-1} + X$ по предположению индукции. Тогда $S_{k+1} = f(S_k) = f(S_{k-1} + X) = f(S_{k-1}) + f(X) = S_k + f(X)$ - что и требовалось доказать.

Критерии оценки

В данном пункте было не очень много различных решений. Чаще всего логика рассуждений была схожая.

Жюри снимало 1 балл, если не был доказан факт про применение функции к частям строки. Остальные баллы могли быть сняты за неточности рассуждений и доказательств.

b. **Рассмотрим S - результат бесконечного последовательного применения функции f к S_0. Сколько различных подстрок длины 4 содержится в S?**

Решение

Давайте введем понятие блока в строке S_i - такая последовательность 3 символов, что ее прообразом является один символ в S_{i-1}. Проще говоря - это abb или baa, то есть образы одного символа.
Заметим, что строка длины 4 может лежать только на стыке двух блоков. Тогда прообразом этих блоков являются 2 символа. Учитывая, что в S_2 присутствуют все возможные комбинации 2 символов (их всего 4) и то, что S_3 является префиксом S, то нам достаточно рассмотреть строки длины 4, которые могут появиться на всех образах этих двух символов. Мы не будем приводить в разборе сами строки, но если аккуратно подсчитать количество различных строк длины 4 в S_3, то получится 12 строк.

Критерии оценки

Ответ без пояснений оценивался в 0 баллов.
Решения, в которых показано, что эти 12 строк действительно встречаются в S, но не показано, что других строк не может быть оценивались в половину баллов от пункта с округлением исходя из результатов остальных пунктов.

c. **Сколько различных подстрок длины 5 содержится в S?**

Решение

Аналогично предыдущему пункту достаточно заметить, что строки длины 5 могут покрывать 2 или 3 блока. С двумя блоками действия полностью аналогичны предыдущему пункту, то есть все

различные подстроки, которые могут встретиться в S и лежащие в 2 блоках будут присутствовать в S_3 (а так же и в S_4).
Для того, чтобы понять, какие строки из 3 символов могут существовать в S, нужно проделать эту операцию ещё раз: прообразом такой строки являются один или два блока. Так как в S_2 встречаются все двухсимвольные сочетания, то в S_3будут встречаться все трёхсимвольные, которые могут встретиться в S. А значит просто посчитав количество различных строк длины 5 в образе S_3, то есть в S_4, мы получим ответ на задачу.
Ответ: 16 строк.

Критерии оценки
Критерии аналогичны предыдущему пункту.

d. **Сколько различных подстрок длины 1000 содержится в S?**

Решение
Обозначим за $f(n)$ - количество различных подстрок длины n в S.
Мы знаем некоторые начальные значения этой функции: $f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 8, f(4) = 12, f(5) = 16$

Давайте рассмотрим то, каким образом строка длины n покрывает блоки. Будем рассматривать $n > 5$, то есть хотя бы один блок данная строка содержит в себе целиком.

Возможно три варианта:
1. Начало подстроки прилегает к началу блока.
2. Второй символ подстроки совпадает с началом блока.
3. Третий символ подстроки совпадает с началом блока.

Докажем, что разные прообразы этих последовательностей блоков с учётом начала нашей строки будут порождать уникальные строки при применении к ним функции f. Поясним, что мы хотим доказать. Пусть $g_n(x,k)$, где $k \in \{0,1,2\}$ - это функция, которая применяет к строке x функция f , отрезает первые k символов и берёт префикс длины n от результата. Мы хотим показать, что при различных парах x, k мы будем получать различные результаты.
Внутри каждого из вариантов очевидно (при одинаковых k), что разные последовательности блоков генерируют разные последовательности. Более строго это можно доказать, если рассмотреть образ первого отличающегося символа: он, очевидно, будет различен в итоговых строках. Такой символ найдётся, так как рассматриваем различные прообразы.
Покажем теперь, почему строки из первого варианта отличаются от строк из второго варианта. Пусть это будет A и B соответственно. Рассмотрим 2 и 3 символ строки A. Так как она прилегает к началу блока, то второй и третий символ у неё совпадает. Если же рассмотреть второй и третий символ строки B, то это будет первый и второй символ блока, которые всегда являются различными. Значит такие строки различны.

Аналогичными рассуждениями можно показать, почему различаются строки из второго и третьего варианта, а также первого и третьего.

Таким образом мы показали, что задавая прообраз строки и её смещение относительно начала образа, мы будем получать уникальные строки длины n при разных образах и смещениях.

Покажем теперь, как можно вычислить $f(n)$.
1. Пусть n делится на 3. Строка такой длины может занимать $\left[\frac{n}{3}\right]$ или $\left[\frac{n}{3}\right] + 1$ блоков, где $[x]$ - целая часть x. Так как мы показали, что строки будут получаться уникальными, то справедливо $f(n) = f(\left[\frac{n}{3}\right]) + 2f(\left[\frac{n}{3}\right] + 1)$.

2. При n дающем остаток 1 при делении на 3 аналогичными рассуждениями можно получить $f(n) = 3f(\left[\frac{n}{3}\right] + 1)$.
3. При n дающем остаток 2 при делении на 3 аналогичными рассуждениями можно получить $f(n) = 2f(\left[\frac{n}{3}\right] + 1) + f(\left[\frac{n}{3}\right] + 2)$.

Докажем теперь, что при $n > 1$ выполняется $f(n) = 4(n-1)$.
База индукции будет чуть шире чем обычно, но мы видим, что для всех $1 < n < 6$ это утверждение выполняется.

Пусть наше утверждение выполняется для всех $1 < k < 3n$ при $n > 1$. Покажем, что оно верно и для всех $1 < k < 3(n + 1)$. Действительно:

$$f(3n) = f(n) + 2f(n+1) = 4(n-1) + 8n = 12n - 4 = 4(3n-1)$$
$$f(3n + 1) = 3f(n + 1) = 12n = 4\,(3n + 1 - 1)$$
$$f(3n + 2) = 2f(n+1) + f(n+2) = 8n + 4(n+1) = 12n + 4 = 4(3n+1)$$

Утверждение доказано.

Значит $f(1000) = 4(1000 - 1) = 3996$

Критерии оценки

К сожалению, у участников не было ни одного решения этого пункта.