Всесибирская открытая олимпиада школьников по астрономии 2021/22 учебного года

Заключительный этап

Авторские решения

9 класс

1. Атмосферное торможение. Спутник массой 42 кг входит в верхние слои атмосферы, где за счет трения об воздух на него постоянно действует сила F = 1 мН, из-за которой орбита спутника уменьшается. Считая, что орбита все время остается круговой, определите скорость уменьшения радиуса его орбиты. *(Д. С. Катков)*

Решение

Поскольку сила достаточно маленькая, мы можем считать, что за один оборот вокруг Земли высота орбиты спутника меняется незначительно. Тогда работа тормозящей силы за оборот равна

$A = – F \cdot S = – F \cdot 2\pi R$

С другой стороны, работа равна изменению полной энергии тела, которая на круговой орбите равна $E = – GMm/R + mV2/2 = – GMm/R + m \cdot GM/2R = – GMm / 2R$.

Обозначим изменение радиуса орбиты за один оборот за ΔR, тогда изменение энергии равно

$\Delta E = (– GMm / 2R + GMm / 2 (R+\Delta R)) \approx GMm\ \Delta R / 2R^2$ (помним, что $\Delta R<0$).

В итоге получим:

$GMm\ \Delta R / 2R^2 = – F \cdot 2\pi R$, откуда

$\Delta R = – F \cdot 4\pi R^3 / (GMm)$

Такое изменение радиуса происходит за время T, которое примерно совпадает с периодом обращения спутника по изначальной орбите (так как изменение радиуса за оборот мы посчитали незначительным). Период обращения равен

$T = 2\pi R / V = 2\pi R^{3/2} / (GM)^{1/2}$.

В итоге скорость изменения радиуса составляет

$V_R = \Delta R / T = – F/m \cdot 2R^{3/2} / (GM)^{1/2}$

Для численной оценки можно заметить, что для невысоких орбит $(GM/R)^{1/2} = V_I \approx 7.8$ км/с. За высоту орбиты можно взять значение порядка 200 км, тогда радиус орбиты R ≈ 6600 км.

Тогда получаем $V_R \approx – 10^{-3} / 42 \cdot 2 \cdot 6{,}8 \cdot 10^6 / 7800 \approx$ 0,042 м/с.

За один оборот (примерно 90 минут) спутник снижается примерно на 220 м.

2. Тёмная тема. Наблюдения показывают, что, вопреки ожиданиям, скорость вращения звезд вокруг центра галактики практически не зависит от радиуса орбиты звезды и составляет 230 км/с. Это объясняется наличием «тёмной материи», масса которой значительно превосходит массу видимого вещества галактики. Определите, как должна зависеть плотность темной материи от расстояния до центра галактики, если она распределена в пространстве сферически симметрично. Массой видимого вещества по сравнению с массой тёмной материи можно пренебречь. *(Д. С. Катков)*

Решение

В случае сферически симметричного распределения массы звезда, находящаяся на расстоянии R от центра галактики, притягивается только материей, находящейся ближе к центру, то есть шаром из тёмной материи с радиусом R.

Тогда скорость её движения по круговой орбите определяется из уравнения

$V^2 = G\, M(R) / R$

Если теперь мы немного отступим от нашей орбиты (заменим R на R + ΔR), то наша скорость будет определяться из аналогичного уравнения

$V^2 = G\, M(R+\Delta R) / (R+\Delta R)$

По условию, левые части этих уравнений совпадают. Значит, должны совпасть и правые части. В притягивающую массу у нас добавился тонкий сферический слой радиусом R и толщиной ΔR, его масса равна $\Delta M = 4\pi R^2\, \Delta R\, \rho(R)$. Приравняем правые части уравнений:

$GM / R = G\, (M + 4\pi R^2\, \Delta R\, \rho(R)) / (R + \Delta R) \approx G\, (M + 4\pi R^2\, \Delta R\, \rho(R)) / R \cdot (1 - \Delta R/R)$

Раскрыв скобки, сократив подобные слагаемые и пренебрегая слагаемым $\sim \Delta R^2$, получим:

$GM\ \ \Delta R/R^2 = 4\pi G R\, \Delta R\, \rho(R)$

Отсюда получаем закон изменения плотности от радиуса: $\rho(R) = M/R \cdot (1/4\pi)\, R^{-2}$, или, поскольку $M/R = V^2/G = \text{const}$,

$\rho \sim R^{-2}$

Заметим, что этот закон мы вывели в пренебрежении «обычной» (светящейся) материей, что для областей, близких к центру галактики, не является правдой (вблизи центра галактики плотность обычной материи даже больше, чем плотность тёмной материи). Поэтому наша плотность и стремится к бесконечности при стремлении радиуса к нулю, что, конечно, на практике не реализуется.

Заметим также, что рассуждения в стиле $M/R = V^2/G = \text{const} \Rightarrow M \sim R \Rightarrow \rho R^3 \sim R \Rightarrow \rho \sim R^{-2}$, хоть и приводят к тому же результату, являются физически неверными, так как позволяют найти зависимость <u>средней</u> плотности темной материи от радиуса рассматриваемого шара, что в общем случае не совпадает с зависимостью <u>величины плотности</u> от расстояния до центра (аналогия — разница между средней и мгновенной скоростью перемещения).

3. Купить или не купить? Астрошкольнику для наблюдений порекомендовали купить телескоп-рефлектор Levenhuk Blitz 203. На сайте продавца написано, что диаметр главного зеркала этого телескопа составляет 203 мм, фокусное расстояние — 800 мм, относительное отверстие — f/4. Телескоп сопровождается окуляром с фокусным расстоянием 6,5 мм. Сможете ли вы наблюдать в этот телескоп туманности со звёздной величиной 14m? А разглядеть на Луне маленькие кратеры диаметром 10 км? *(И. О. Орлов)*

Решение

Проницающая способность телескопа определяется отношением квадратов диаметров входного и выходного отверстий. Из заданных фокусных расстояний и диаметра входного отверстия мы можем посчитать размер изображения после окуляра: d = D · f/F = 1,6 мм. Это и будет наше выходное отверстие при наблюдении глазом. Попутно отмечаем, что для нормальных визуальных наблюдений в этот телескоп нам нужен окуляр с большим фокусным расстоянием.

Яркость наблюдаемого объекта повышается в $(203 / 1{,}6)^2$ = 16 тыс. раз, что соответствует сдвигу предела по звёздной величине на 8^m. То есть объекты со звёздной величиной $+14^m$ будут наблюдаться «на пределе», при идеальных условиях и очень хорошем зрении.

О кратерах. Угловой размер 10-километрового кратера при среднем расстоянии от Луны до Земли равен 10 км / 384000 км = 5,4''. Нам надо проверить два возможных ограничения: дифракционный предел телескопа и предел разрешения нашего глаза.

Дифракционный предел нашего телескопа составляет $\alpha_d = 1.22\ \lambda/D$ = 0,66'', то есть здесь проблем нет, теоретически кратер вполне доступен наблюдениям.

Коэффициент углового увеличения телескопа составляет F/f = 800 / 6,5 = 123, значит, угловой размер изображения кратера будет равен 123 · 5,4'' = 11', что вполне доступно наблюдению глазом, разумеется, при условии хорошей «недрожащей» атмосферы.

4. Глобальное потепление. Уже сейчас средняя температура на Земле за последние 100-150 лет возросла на 1 °C. По прогнозам, если темпы промышленности не начнут спадать, к 2100 году глобальная средняя температура вырастет ещё на +4 °C. Эко-активисты решили бороться с надвигающейся угрозой и предложили перекрасить крыши домов, дороги и прочие искусственные объекты в белый цвет. Таким образом получится повысить альбедо Земли до 0,41. Поможет ли эта мера? И какой «температурный запас» есть у человечества, если мы сможем сделать нашу планету белым шаром с альбедо 0,85? (альбедо Земли сейчас 0,367). *(В. Шимохина)*

Решение

Равновесная температура планеты определяется балансом поглощаемого и испускаемого излучения, а также парниковым эффектом из-за поглощения и переиспускания энергии атмосферой.

Из законов теории излучения и определения альбедо несложно вывести известную формулу равновесной температуры:

$T = T_{зв} \cdot (1 - A)^{1/4} \cdot (R_{зв} / 2D)^{1/2}$

Здесь $T_{зв}$ – температура поверхности звезды, $R_{зв}$ – радиус звезды, D – расстояние между звездой и планетой, A – альбедо планеты.

Будем считать, что при всех планируемых нами изменениях альбедо парниковый эффект останется постоянным, то есть изменение реальной температуры планеты будет совпадать с изменением равновесной температуры, вычисленной по приведённой выше формуле.

При текущем значении альбедо T_0 = 250 К (помним про парниковый эффект).

При A = 0,41 получим T_1 = 245,5 К, то есть покраска крыш в белый свет как раз скомпенсирует эффект от промышленных выбросов.

При перекраске всей Земли в белый цвет (A = 0,85) получаем T_2 = 174,4 К, что при текущем значении «парниковой добавки» даст реальную среднюю температуру на планете порядка 205 К = – 68°С. Температурный запас составит примерно 76°. Можно, и даже нужно будет смело выбрасывать в атмосферу углекислый газ.

·**5. «А теперь горбатый!..»** Вращение Тритона вокруг своей оси синхронизировано, т.е. период вращения вокруг оси совпадает с периодом вращения вокруг планеты. Будем считать, что Тритон вызывает приливные горбы на «поверхности» своей планеты. Определите период прохождения приливного горба через «точку поверхности» планеты. Определите период прохождения приливного горба, вызванного планетой на Тритоне, через точку поверхности Тритона. Орбиту Тритона считайте круговой. *(И. О. Потатуркин)*

Решение

Период кульминации (верхней или нижней) Тритона в «точке поверхности» Нептуна

$$\frac{16 \cdot 5{,}9 \cdot 24}{16 + 5{,}9 \cdot 24} \approx 14{,}4\,часа$$

Поскольку приливных горбов 2, период прохождения

$$\frac{14{,}4}{2} = 7{,}2\,часа.$$

Поскольку вращение Тритона синхронизировано, приливные горбы, вызванные Нептуном, не движутся по его поверхности. Т.е. период равен ∞.

6. Аккреция в двойной системе. В двойной системе звёзд, состоящей из компонент массами 2 M☼ и 1,5 M☼, массивная звезда начинает «уходить» с главной последовательности, постепенно превращаясь в красного гиганта и увеличивая свой радиус. При каком значении радиуса массивной звезды в системе начнётся аккреция – перетекание вещества гиганта на звезду-компаньон? Считаем, что общая масса звезды при «раздувании» сохраняется. Расстояние между компонентами системы – 20 а.е. *(И. О. Орлов)*

Решение

Если не учитывать вращение звезды-гиганта вокруг своей оси, то аккреция начнётся, когда внешние слои звезды-гиганта будут сильнее притягиваться звездой-компаньоном, чем ядром самого гиганта.

Пограничный случай реализуется, когда сила притяжения элемента поверхности гиганта к ядру гиганта равна силе притяжение звезды-компаньона, находящейся в зените.

Приравниваем силы:

$-GM_1m/R_1^2 = -GM_2m/(D - R_1)^2$

Отсюда $(D - R_1) / R_1 = (M_2/M_1)^{0,5} = 0,87$

Получаем необходимый для начала аккреции радиус звезды-гиганта: $R_1 = D / 1,87 = 10,7$ а.е. Это большой, но не экстремальный радиус для звезды – например, радиус Бетельгейзе превышает 4 а.е., а радиус мю Цефея составляет от 6 до 8,5 а.е.

Учёт других факторов – вращения звезды-гиганта, тепловой скорости вещества на поверхности – несколько уменьшит границу необходимого радиуса.