Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации

Олимпиада школьников РАНХиГС по Экономике

10 - 11 класс

2021 – 2022 учебный год

Заключительный этап

Вариант 1.

Задача 1. 15 балов

Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{x^2-\sqrt{3}\cdot|x|+1}+\sqrt{x^2+\sqrt{3}\cdot|x|+3},$$

а также значения x, при которых оно достигается.

Решение:

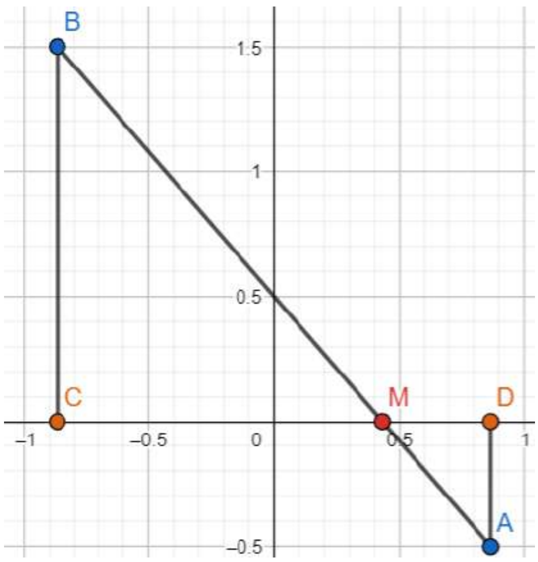
Обозначим $t=|x|\geq 0$. Тогда требуется найти наименьшее значение функции

$$f(t)=\sqrt{t^2-\sqrt{3}\cdot t+1}+\sqrt{t^2+\sqrt{3}\cdot t+3}$$

при $t\geq 0$. Преобразуем вид функции $f(t)$ к виду:

$$f(t)=\sqrt{\left(t-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}+\sqrt{\left(t+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{9}{4}}.$$

Пусть заданы точки $M(t,0)$, $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$. Нетрудно понять, что рассматриваемое выражение есть не что иное, как сумма длин отрезков AM и BM, то есть $f(t)=AM+BM$. Если точка M не лежит на отрезке AB, то $AM+BM>AB$. В то же время, если $M\in AB$, то $AM+BM=AB$, значит, сумма $AM+BM$ принимает наименьшее значение, если и только если точка M лежит на отрезке AB. Итак, точка M является точкой пересечения отрезка AB с осью Ox.



Для нахождения координат точки M рассмотрим подобные треугольники MDA и MCB:

$$\frac{MD}{CM}=\frac{AD}{BC}=\frac{1}{3}.$$

Поэтому, если $MD=a$, то $MC=3a$ и отсюда

$$CD=\sqrt{3}=MD+MC=a+3a=4a,$$

$$a=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Отсюда находим координаты точки $M\left(\frac{\sqrt{3}}{4},0\right)$.

Итак, наименьшее значение функции $f(t)$ достигается при $t=|x|=\frac{\sqrt{3}}{4}$ и равно:

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\sqrt{\frac{3}{16}+\frac{1}{4}}+\sqrt{\frac{27}{16}+\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{4}+\frac{3\sqrt{7}}{4}=\sqrt{7}.$$

Ответ: $\sqrt{7}$ при $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{4}$

Критерии проверки:

1. Наличие обоснованного решения и правильного ответа – 15 баллов.
2. Наличие обоснованного решения, однако, полученный ответ отличается от правильного ответа в результате арифметических вычислений – 10 баллов.
3. Имеется идея решения, задача сведена к исследованию суммы расстояний, однако, решение не доведено до конца – 5 баллов.
4. В остальных случаях – 0 баллов.

Задача 2. 15 балов

Известно, что касательные к графику целевой функции $y=a(x+1)^2+1$, проведенные из точки $M(x_0\,;y_0)$ пересекаются под прямым углом. Восстановите вид целевой функции, если известно, что координаты точки $M(x_0\,;y_0)$ удовлетворяют соотношению:

$$\log_{3x-x^2+1}(y-4)=\log_{3x-x^2+1}\frac{|2x+4|-|2x+1|}{3x+4{,}5}\sqrt{x^2+3x+2{,}25}\,.$$

Решение

Преобразуем $y-1=a(x+1)^2$ и заменим *u=y-1; z=x+1* так что $u=az^2$. Пусть $A(z_1\,;az_1)$ и $B(z_2\,;az_2)$ точки параболы $u=az^2$ и пусть касательные в точках A и B пересекаются в точке $(z_0;u_0)$.

Запишем уравнение касательной в точке *A:* $u-u_1=2az_1(z-z_1)$, где $u_1=az_1^2$.

Так как эта прямая проходит через точку $(z_0;u_0)$, то $u_0-az_1^2=2az_1(z_0-z_1)$ или $u_0=2az_0z_1-az_1^2$.

Аналогично получаем соотношение для касательной в точке B: $u_0=2az_0z_2-az_2^2$.

Вычитая эти соотношения, получаем: $z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}$. Подставляя это значение в одно из предыдущих соотношений, получаем: $u_0 = az_1 z_2$.

Для угловых коэффициентов перпендикулярных прямых имеем: $-1 = k_1 k_2 = 2az_1 2az_2 = 4au_0$.

Отсюда $a = -\frac{1}{4u_0} = -\frac{1}{4(y_0 - 1)}$.

Значение y_0 найдем из соотношения:

$$\log_{3x-x^2+1}(y-4) = \log_{3x-x^2+1} \frac{|2x+4| - |2x+1|}{3x+4,5}\sqrt{x^2+3x+2,25}.$$

ОДЗ: у >4; $3x - x^2 + 1 > 0$; $\frac{|2x+4| - |2x+1|}{3x+4,5}\sqrt{x^2+3x+2,25} > 0$

И далее: $\begin{cases} y > 4 \\ x \in \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}; \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) \end{cases}$.

Потенциируя логарифмическое выражение, получим: $y - 4 = \frac{|x+2| - |x+0,5|}{1,5} \cdot \frac{|x+1,5|}{x+1,5}$.

Выражение справа в области определения принимает значение 1. Таким образом, получаем:

$\begin{cases} y_0 - 4 = 1 \\ x_0 \in \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}; \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) \end{cases}$. Отсюда имеем: $a = -\frac{1}{4(y_0 - 1)} = -\frac{1}{16} = -0,0625$

и функция

$y = -0,0625(x+1)^2 + 1$

Ответ: $y = -0,0625(x+1)^2 + 1$

Критерии проверки:

- приведено верное решение задачи и получен правильный ответ (вид функции) – 15 баллов,
- приведено верное решение задачи, но получен неправильный ответ или нет ответа – 8 баллов,
- ошибка в решении, но получен правильный ответ (вид функции) – 7 баллов,
- решение неверное или решение отсутствует, при этом получен правильный ответ (вид функции) – 1 балл,
- решение неверное или решение отсутствует, при этом получен неправильный ответ, или нет ответа – 0 баллов.

Задача 3. 20 балов

Приобретение товаров в розницу, но по оптовым ценам называют совместными покупками, если люди кооперируются, покупая товары у поставщиков без наценки.
Практика совместных покупок стала популярна в России в середине 2000-х годов и используется и в настоящее время. Покупатели объединяются на специализированных сайтах или в социальных сетях. В каждой закупке у поставщиков прописаны условия приобретения товаров. Например, указаны сроки поставки, минимальная сумма заказа, условия возврата бракованного товара. Те, кто выполняет роль организаторов покупок, договариваются с поставщиками, заказывают, оплачивают и сортируют товар, а затем отправляют товар по почте или отвозят его в пункт выдачи, где его и получают заказчики, участвующие в совместной покупке. Организаторы получают некоторый процент за свои услуги и, ориентируясь на свой опыт работы с конкретным поставщиком, всегда информируют заказчиков велик ли риск поставки товаров не того цвета или размера, и как правило, они не несут ответственности за риск потери груза в пути, конфискацию его на таможне и т. п.
(а) Почему, несмотря на описанные риски, практика совместных покупок популярна во многих странах? Объясните.
(б) Почему подобная практика совместных покупок не популярна, например, среди жильцов одного дома, подъезда, этажа при заказе продуктов и бытовых товаров из супермаркетов, ведь в этом случае покупатели могли бы существенно сэкономить на доставке товаров? Объясните.

Решение:

(а) Приведем несколько факторов, которые могут объяснить выгодность подобных покупок.
1) Совместные закупки позволяют значительно сэкономить на приобретении товаров, поскольку фактически осуществляются по оптовым ценам, а накладные расходы, связанные с доставкой товара до покупателя и оплатой услуг организаторов этой покупки оказываются незначительными, так как распределены между всеми участниками группы.
2) Большая группа потребителей совместно, делясь друг с другом информацией об уже приобретенных ранее товарах, может более точно оценить качество товара, чем каждый из покупателей по отдельности. Это позволяет им выбирать лучшие варианты, а при необходимости обмениваться друг с другом товарами.
3) Как правило, внутри таких сообществ люди более охотно делятся друг с другом объективной информацией о товарах, организаторах и поставщиках. Поэтому даже если при совместной покупке и возникают издержки, связанные с описанными рисками, покупатели готовы заплатить за покупку у тех, чья репутация оказывается выше, чья репутация может свидетельствовать о качестве приобретаемого товара.

(б) Приведем несколько факторов, которые могут объяснить невыгодность совместных бытовых покупок среди покупателей, проживающих неподалеку друг от друга.
1) Даже если соседи смогут договориться о временно́м регламенте подобных закупок, будут возникать значительные трансакционные издержки, которые может нести организатор этих закупок. Набор продуктов каждого соседа может быть очень разнообразен. Если сформировать единый заказ не так сложно, то сортировка его после покупки и

предоставление каждому покупателю возможности забрать свой заказ потребует, скорее всего, больших временных затрат. Довольно сложно будет найти того, кто согласится нести такие значительные организационные издержки даже за вознаграждение.
2) Даже если найдется тот, кто готов будет взять на себя все организационные расходы за некоторое вознаграждение, размер этого вознаграждения может быть столь существенной долей в расходах каждого, что соседи сочтут невыгодным участвовать в совместных покупках.
3) Довольно часто магазины расположены рядом с местом проживания, а покупки совершаются не запланировано, «по дороге». Поэтому люди могут счесть расходы (временные, организационные и т. п.) на совместные покупки значительными по сравнению с самостоятельными покупками в близлежащих магазинах.
4) Могут возникать и спорные вопросы между соседями, связанные с распределением расходов на доставку товаров, ведь набор товаров по весу и стоимости может оказаться весьма различным. Как именно в этом случае должны быть распределены расходы на доставку товаров? Будет довольно сложно соседям договориться между собой о едином справедливом подходе к распределению этих расходов.

Критерии проверки:
(а) Приведен один аргументированный ответ, указывающий на экономические факторы, – 7 баллов.
Любой другой дополнительный аргументированный ответ, указывающий на экономические факторы, - 3 балла.
(б) Приведен один аргументированный ответ, указывающий на экономические факторы, – 7 баллов.
Любой другой дополнительный аргументированный ответ, указывающий на экономические факторы, - 3 балла.

Задача 4. 25 балов

Начинающий экономист-криптограф получил от правителя криптограмму, в которой был очередной секретный указ о введении потоварного налога на некотором рынке. В криптограмме была указана сумма налоговых поступлений, которую необходимо собрать. Также особый акцент был сделан на том, что бо́льшую сумму налоговых поступлений на данном рынке собрать невозможно. К сожалению, экономист-криптограф расшифровал криптограмму с ошибкой – цифры в сумме налоговых поступлений были определены им в неправильном порядке. Основываясь на ошибочных данных, было принято решение ввести потоварный налог на потребителя в размере 30 денежных единиц за единицу товара. Известно, что рыночное предложение имеет вид $Qs = 6P - 312$, а рыночный спрос линеен. В ситуации, когда никаких налогов нет, в точке равновесия ценовая эластичность рыночного предложения в 1,5 раза выше модуля ценовой эластичности рыночной функции спроса. После того как был введён налог, цена потребителя выросла до 118 денежных единиц.
1) Восстановите функцию рыночного спроса.
2) Определите величину налоговых поступлений, которые были собраны при выбранной ставке.

3) Определите ставку количественного налога, которая позволила бы достичь указа правителя.
4) Чему равны налоговые сборы, которые указал собрать правитель?

Решение:
1) Пусть функция спроса линейна $Q_d = a - bP$. Известно, что $1{,}5 \cdot |E_p^d| = E_p^s$. Для линейных функций спроса, пользуясь определением эластичности, получаем: $1{,}5 \cdot \frac{bP_e}{Q_e} = \frac{6P_e}{Q_e}$. Откуда находим, что $b = 4$.

Если ввести потоварный налог $t = 30$, то $P_d = 118$. $a - 4P_d = 6(P_d - 30) - 312$; $0{,}1a + 49{,}2 = P_d = 118$; откуда $a = 688$.
Функция рыночного спроса имеет вид $Q_d = 688 - 4P$.
2) Известно, что $P_d(t = 30) = 118$. Значит, $Q_d = 688 - 472 = 216$, $T = 216 \cdot 30 = 6480$.
3) Пусть $P_s = P_d - t$, $688 - 4P_d = 6P_d - 6t - 312$, $P_d = 100 + 0{,}6t$; $Q_d = 288 - 2{,}4t$. Налоговые поступления составляют $T = Q \cdot t = 288t - 2{,}4t^2$. График функции представляет собой параболу с ветвями вниз, максимум функции достигается при $t^* = 60$.
4) $T_{max} = 288 \cdot 60 - 2{,}4 \cdot 60 \cdot 60 = 8640$.

Критерии проверки:
1) Верно определен наклон у кривой спроса - 3 балла.
Верно определена цена продажи при неправильном налоге - 1 балл.
Верно определен объем продажи при неправильном налоге - 2 балла.
Верно определен свободный коэффициент у кривой спроса - 3 балла.
Верно найдена функция спроса - 1 балл.
Если при решении допущена ошибка/описка, которая приводит к результатам, противоречащим экономической логике, то выставляется только 3 балла за этот пункт при верном (в остальном) ходе решения.
2) Верно найдены налоговые сборы - 3 балла.
3) Объяснено, как искать ставку, дающую максимальные налоговые сборы - 4 балла.
Найдена ставка, дающая максимальные налоговые сборы - 4 балла. Если при нахождении ставки был получен результат, противоречащий логике, то даже при верном значении t эти 4 балла не выставляются.
4) Найдено количество товара, которое будет продано при ставке, дающей максимальные налоговые сборы - 2 балла. Если при нахождении количества был получен результат, противоречащий логике, то даже при верном значении t эти 2 балла не выставляются.
Найдены налоговые сборы при этом налоге - 2 балла. Если налоговые сборы найдены, но их значение не соотносится с условием задачи о перепутанных цифрах, то эти 2 балла не выставляются.

Штрафы:
Допущена арифметическая ошибка при вычислениях, которая не привела в дальнейшем к результатам, противоречащим экономической логике – 1 балл.
Не обосновано, что полученное значение налоговой ставки в пункте 3) дает именно максимум, а не минимум целевой функции.

Задача 5. 25 балов

Спрос на продукцию фирмы имеет вид $Qd = 120 - 0{,}5P$. Товар данной фирмы можно производить только на специальном заводе, стоимость открытия которого составляет 25 денежных единиц. Производство Q единиц продукции на данном заводе обходится в $4Q^2$ денежных единиц.

1. Определите, чему равна максимальная прибыль фирмы, если фирма может открыть только 1 завод.
2. Предположим, что изначально фирма могла открыть не более 2 заводов. Чему равна максимальная прибыль в этом случае? Будет ли фирма открывать второй завод?
3. Предположим, что изначально фирма могла открыть любое количество заводов данного типа. Чему равна максимальная прибыль фирмы в таком случае? Сколько заводов следует открыть фирме?

Решение:

1. Функция прибыли при одном заводе в зависимости от объема выпускаемой продукции имеет вид
$PR = TR - TC = 240Q - 2Q^2 - 4Q^2 - 25$. График функции представляет собой параболу с ветвями вниз, максимум функции достигается при $Q^* = 20$. $PR_{max} = 2375$.

2. Фирма будет готова открыть два завода, если прибыль увеличится относительно ситуации в пункте 1. Предположим, что фирма имеет два завода и издержки на открытие уже понесены. Какой бы фиксированный объем продукции ни выпускала фирма, максимальная прибыль может быть получена только, если издержки для производства совокупного объёма продукции минимальны. Действительно, если бы издержки оказались не минимальными при данном объеме выпуска, фирма могла бы снизить издержки, увеличив тем самым прибыль. Таким образом, минимизация издержек является необходимым условием максимизации прибыли фирмы.

Для каждого завода функция $VC'_Q(Q)$ является возрастающей и совпадает, а потому минимальный объём издержек для некоторого совокупного объёма производства Q достигается при условии $Q_1 = Q_2 = 0{,}5Q$. Действительно, предположим, фирма предполагает выпустить на каждом заводе $Q_1 > Q_2$, тогда в силу эквивалентности возрастающих функций $VC_1\left(Q_1\right)$ и $VC_2\left(Q_2\right)$ можно сделать вывод, что $MC_1\left(Q_1\right) > MC_2\left(Q_2\right)$. Перераспределяя продукцию с первого завода в пользу второго, совокупные издержки будут уменьшаться, так как предельные затраты перераспределенной единицы на втором заводе меньше, чем на первом. Такое перераспределение выпусков и снижение совокупных издержек возможно до момента, пока не выполнится равенство $Q_1 = Q_2$.

$TC = 4(0{,}5Q)^2 + 4(0{,}5Q)^2 + 50 = 2Q^2 + 50.$

Функция прибыли имеет вид $PR = 240Q - 2Q^2 - 2Q^2 - 50$. График этой функции относительно объема выпуска представляет собой параболу с ветвями, направленными вниз, максимум функции достигается при $Q^* = 30$, $PR_{max} = 3550$. Прибыль с двумя заводами выше, чем прибыль с одним заводом, а значит имеет смысл открывать второй завод.

3. Заметим, что при любом данном объеме выпускаемой продукции (и связанной с этим объемом выручки фирмы) совокупные издержки фирмы (а следовательно, и ее прибыль) зависят только от того, сколько заводов использовала фирма и как она распределила выпуски между этими заводами. И наоборот, при любом количестве заводов у фирмы и оптимальном распределении выпусков на них прибыль фирмы будет зависеть только от того, какое количество товара она произведет. Поэтому максимизация прибыли в данных условиях - это осуществление двух действий: выбор оптимального объёма продукции и выбор количества заводов, которое стоит открыть. Порядок действий не влияет на итоговый ответ в силу причин, указанных выше. Продемонстрируем два подхода, которые приводят к верному решению задачи. Согласно первому подходу сначала можно определить функцию, обеспечивающую минимальный объём затрат при каждом объёме продукции, а после этого, с учетом данной функции выбрать оптимальный объём продукции, максимизирующий прибыль. Второй подход заключается в первоочередном определении зависимости оптимального объёма продукции от количества открытых заводов и дальнейшего поиска оптимального количества заводов, которое позволяет получить максимальную прибыль.

1) Функция издержек при открытии n заводов – функция, показывающая минимальный уровень затрат, который необходимо понести для производства Q единиц продукции (см. пояснения в пункте 1. решения задачи). Результат полученный для двух заводов $Q_1 = Q_2 = \frac{Q}{n}$ может быть легко экстраполирован для N заводов: если предельные издержки при некотором распределении выпусков между заводами на каком-то заводе меньше, чем на любом другом, то имеет смысл перераспределять продукцию до момента пока не будет достигнуто равенство $Q_1 = Q_2 = \cdots = Q_n = \frac{Q}{n}$.

Суммарная функция издержек производителя тогда имеет вид

$$TC = 4\left(\frac{Q}{n}\right)^2 + 4\left(\frac{Q}{n}\right)^2 + \cdots + 4\left(\frac{Q}{n}\right)^2 + 25n.$$

Раскрыв скобки, получаем, что $TC = \frac{4Q^2}{n^2} \cdot n + 25n = \frac{4Q^2}{n} + 25n$. Заметим, что для фиксированного Q всегда можно найти такое количество заводов n, что TC будет достигать минимального значения. $TC'_n = 25 - \frac{4Q^2}{n^2} = 0, n = 0{,}4Q$. При $Q > 0$, значения функции TC' меняют знак с – на +, а значит $n = 0{,}4Q$ позволяет обеспечить минимальные значения TC при любой Q. $TC = 25 \cdot 0{,}4Q + \frac{4Q^2}{0{,}4Q} = 20Q$. Получив функцию издержек, обеспечивающую минимальный уровень затрат, можно выбрать объём продукции максимизирующий прибыль.

Составим функцию прибыли $PR = 240Q - 2Q^2 - 20Q = 220Q - 2Q^2$. График этой функции относительно объема выпускаемой продукции представляет собой параболу с ветвями, направленными вниз, максимум функции достигается при $Q^* = 55$. $PR_{max} = 6050$. Оптимальное количество заводов составляет $n = 22$.

2) Логика распределения продукции между заводами применима и здесь, а потому $TC = \frac{4Q^2}{n^2} \cdot n + 25n = \frac{4Q^2}{n} + 25n$.

Составим функцию прибыли $PR = 240Q - 2Q^2 - \frac{4Q^2}{n} - 25n$. Предположим, что количество заводов фиксировано и найдём оптимальное значение Q для каждого n. График этой функции относительно объема выпускаемой продукции – парабола с ветвями, направленными вниз относительно Q, максимум в вершине, $Q^* = \frac{240n}{4n+8}$. Подставив оптимальное значение объёма в функцию прибыли получаем, что $PR = \frac{7200n}{n+2} - 25n$. Найдём оптимальное количество заводов. $PR'_n = \frac{14400}{(n+2)^2} - 25 = 0$, $n_1 = -26$, $n_2 = 22$. Очевидно, что количество заводов число неотрицательное. В точке $n_2 = 22$ производная меняет знак с + на –, значит максимальная прибыль достигается при открытии 22 заводов. $PR = \frac{7200 \cdot 22}{22+2} - 25 \cdot 22 = 6050$.

Критерии проверки:

1) Верно найден оптимальный выпуск или оптимальная цена - 2 балла.
Верно найдена прибыль фирмы, имеющий один завод - 1 балл.
2) Верно объяснено, как нужно распределить выпуски между заводами - 3 балла.
Верно найдено распределение выпусков между заводами- 4 балла.
Верно найден оптимальный выпуск или оптимальная цена - 1 балл.
Верно найдена прибыль фирмы с двумя заводами - 1 балл.
Приведено сравнение прибыли и сделан вывод - 1 балл.
Если решение о разделении выпуска между заводами было концептуально неверным, то за решение пункта 2) ставится не более 1 балла за сравнение прибыли.
3) Верно выписана прибыль фирмы при произвольном количестве заводов - 1 балл.
Корректно решена задача максимизации прибыли при верном распределении выпусков между заводами - 6 баллов.
За идею максимизации прибыли по количеству заводов n либо за пояснения, почему можно минимизировать издержки по количеству заводов n - 3 балла (при отсутствии таких пояснений за эту часть решения выставляется - 0 баллов).
Верно найдено количество заводов - 1 балл. Если верное количество заводов было получено случайно при концептуально неверном решении, то баллы за эту часть решения не выставляются.
Верно найдена прибыль с этим количеством заводов - 1 балл.
Если решение о разделении выпуска между заводами было концептуально неверным, то за пункт 3) ставится только 3 балла при условии, что есть идея о максимизации прибыли по количеству заводов n или идея о минимизации издержек по количеству заводов n.

Штрафы:
За каждую арифметическую ошибку оценка за это задание снижается на 1 балл, если допущенная ошибка не привела к результату, противоречащему экономической логике.
За отсутствие обоснования максимума функции оценка за это задание снижается на 1 балл (за пункты 1. и 2. участник штрафуется только один раз, даже если в каждом пункте обоснование отсутствовало и не штрафуется, если хотя бы в одном пункте это обоснование присутствовало).
За отсутствие обоснования минимума функции оценка за это задание снижается на 1 балл.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации

Олимпиада школьников РАНХиГС по Экономике

10 - 11 класс

2021 – 2022 учебный год

Заключительный этап

Вариант 2.

Задача 1. 15 балов

Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{x^2-2\sqrt{3}\cdot|x|+4}+\sqrt{x^2+2\sqrt{3}\cdot|x|+12},$$

а также значения x, при которых оно достигается.

Решение:

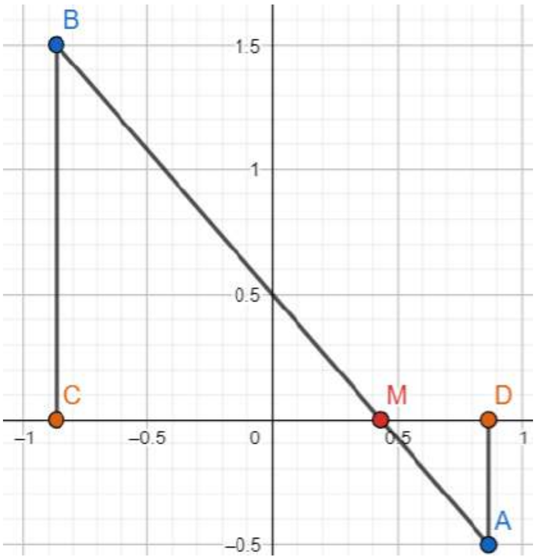
Обозначим $t=\frac{|x|}{2}\geq 0$. Тогда требуется найти наименьшее значение функции

$$f(t)=2\left(\sqrt{t^2-\sqrt{3}\cdot t+4}+\sqrt{t^2+\sqrt{3}\cdot t+12}\right)$$

при $t\geq 0$. Преобразуем вид функции $f(t)$ к виду:

$$f(t)=2\left(\sqrt{\left(t-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}+\sqrt{\left(t+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{9}{4}}\right).$$

Пусть заданы точки $M(t,0)$, $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$. Нетрудно понять, что рассматриваемое выражение есть не что иное, как удвоенная сумма длин отрезков AM и BM, то есть $f(t)=2(AM+BM)$. Если точка M не лежит на отрезке AB, то $AM+BM>AB$. В то же время, если $M\in AB$, то $AM+BM=AB$, значит, сумма $AM+BM$ принимает наименьшее значение, если и только если точка M лежит на отрезке AB. Итак, точка M является точкой пересечения отрезка AB с осью Ox.



Для нахождения координат точки M рассмотрим подобные треугольники MDA и MCB:

$$\frac{MD}{CM}=\frac{AD}{BC}=\frac{1}{3}.$$

Поэтому, если $MD=a$, то $MC=3a$ и отсюда

$$CD=\sqrt{3}=MD+MC=a+3a=4a,$$

$$a=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Отсюда находим координаты точки $M\left(\frac{\sqrt{3}}{4},0\right)$. Итак, наименьшее значение функции $f(t)$ достигается при $t=\frac{|x|}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$ и равно:

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=2\left(\sqrt{\frac{3}{16}+\frac{1}{4}}+\sqrt{\frac{27}{16}+\frac{9}{4}}\right)=$$

$$=2\left(\frac{\sqrt{7}}{4}+\frac{3\sqrt{7}}{4}\right)=2\sqrt{7}.$$

Ответ: $2\sqrt{7}$ при $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Критерии:

1. Наличие обоснованного решения и правильного ответа – 15 баллов.
2. Наличие обоснованного решения, однако, полученный ответ отличается от правильного ответа в результате арифметических вычислений – 10 баллов.
3. Имеется идея решения, задача сведена к исследованию суммы расстояний, однако, решение не доведено до конца – 5 баллов.
4. В остальных случаях – 0 баллов.

Задача 2. 15 балов

Известно, что касательные к графику целевой функции $y=a(x+2)^2+2$, проведенные из точки $M(x_0;y_0)$ пересекаются под прямым углом. Восстановите вид целевой функции, если известно, что координаты точки $M(x_0;y_0)$ удовлетворяют соотношению:

$$\log_{x-x^2+3}(y-6)=\log_{x-x^2+3}\frac{|2x+6|-|2x+3|}{3x+7,5}\sqrt{x^2+5x+6,25}.$$

Решение

Преобразуем $y-2=a(x+2)^2$ и заменим *u=y-2; z=x+2* так что $u=az^2$. Пусть $A(z_1;az_1)$ и $B(z_2;az_2)$ точки параболы $u=az^2$ и пусть касательные в точках A и B пересекаются в точке $(z_0;u_0)$.

Запишем уравнение касательной в точке *A:* $u-u_1=2az_1(z-z_1)$, где $u_1=az_1^2$.

Так как эта прямая проходит через точку $(z_0;u_0)$, то $u_0-az_1^2=2az_1(z_0-z_1)$ или $u_0=2az_0z_1-az_1^2$.

Аналогично получаем соотношение для касательной в точке B: $u_0 = 2az_0z_2 - az_2^2$.

Вычитая эти соотношения, получаем: $z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}$. Подставляя это значение в одно из предыдущих соотношений, получаем: $u_0 = az_1z_2$.

Для угловых коэффициентов перпендикулярных прямых имеем: $-1 = k_1k_2 = 2az_1 2az_2 = 4au_0$.

Отсюда $a = -\frac{1}{4u_0} = -\frac{1}{4(y_0 - 2)}$.

Значение y_0 найдем из соотношения: $\log_{x-x^2+3}(y-6) = \log_{x-x^2+3} \frac{|2x+6| - |2x+3|}{3x+7,5}\sqrt{x^2+5x+6,25}$.

ОДЗ: y >6; $x - x^2 + 3 > 0$; $\frac{|2x+6| - |2x+3|}{3x+7,5}\sqrt{x^2+5x+6,25} > 0$ И далее: $\begin{cases} y > 6 \\ x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right) \end{cases}$. Потенциируя логарифмическое выражение, получим: $y - 6 = \frac{|x+3| - |x+1,5|}{1,5} \cdot \frac{|x+2,5|}{x+2,5}$. Выражение справа в области определения принимает значение 1. Таким образом, получаем: $\begin{cases} y_0 - 6 = 1 \\ x_0 \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right) \end{cases}$. Отсюда имеем:

$$a = -\frac{1}{4(y_0 - 2)} = -\frac{1}{20} = -0,05$$

и функция
y= - 0,05(x+2)^2*+2*

Ответ: *y= - 0,05(x+2)*^{2}*+2*

Критерий
- приведено верное решение задачи и получен правильный ответ (вид функции) – 15 баллов,
- приведено верное решение задачи, но получен неправильный ответ или нет ответа – 8 баллов,
- ошибка в решении, но получен правильный ответ (вид функции) – 7 баллов,
- решение неверное или решение отсутствует, при этом получен правильный ответ (вид функции) – 1 балл,
- решение неверное или решение отсутствует, при этом получен неправильный ответ, или нет ответа – 0 баллов.

Задача 3. 20 балов

Приобретение товаров в розницу, но по оптовым ценам называют совместными покупками, если люди кооперируются, покупая товары у поставщиков без наценки.
Практика совместных покупок стала популярна в России в середине 2000-х годов и используется и в настоящее время. Покупатели объединяются на специализированных сайтах или в социальных сетях. В каждой закупке у поставщиков прописаны условия приобретения товаров. Например, указаны сроки поставки, минимальная сумма заказа, условия возврата бракованного товара. Те, кто выполняет роль организаторов покупок, договариваются с поставщиками, заказывают, оплачивают и сортируют товар, а затем отправляют товар по почте или отвозят его в пункт выдачи, где его и получают заказчики, участвующие в совместной покупке. Организаторы получают некоторый процент за свои услуги и, ориентируясь на свой опыт работы с конкретным поставщиком, всегда информируют заказчиков велик ли риск поставки товаров не того цвета или размера, и как правило, они не несут ответственности за риск потери груза в пути, конфискацию его на таможне и т.п.
(а) Почему, несмотря на описанные риски, практика совместных покупок популярна во многих странах? Объясните.
(б) Почему подобная практика совместных покупок не популярна, например, среди жильцов одного дома, подъезда, этажа при заказе продуктов и бытовых товаров из супермаркетов, ведь в этом случае покупатели могли бы существенно сэкономить на доставке товаров? Объясните.

Решение:

(а) Приведем несколько факторов, которые могут объяснить выгодность подобных покупок.
1) Совместные закупки позволяют значительно сэкономить на приобретении товаров, поскольку фактически осуществляются по оптовым ценам, а накладные расходы, связанные с доставкой товара до покупателя и оплатой услуг организаторов этой покупки оказываются незначительными, так как распределены между всеми участниками группы.
2) Большая группа потребителей совместно, делясь друг с другом информацией об уже приобретенных ранее товарах, может более точно оценить качество товара, чем каждый из покупателей по отдельности. Это позволяет им выбирать лучшие варианты, а при необходимости обмениваться друг с другом товарами.
3) Как правило, внутри таких сообществ люди более охотно делятся друг с другом объективной информацией о товарах, организаторах и поставщиках. Поэтому даже если при совместной покупке и возникают издержки, связанные с описанными рисками, покупатели готовы заплатить за покупку у тех, чья репутация оказывается выше, чья репутация может свидетельствовать о качестве приобретаемого товара.

(б) Приведем несколько факторов, которые могут объяснить невыгодность совместных бытовых покупок среди покупателей, проживающих неподалеку друг от друга.
1) Даже если соседи смогут договориться о временно́м регламенте подобных закупок, будут возникать значительные трансакционные издержки, которые может нести организатор этих закупок. Набор продуктов каждого соседа может быть очень разнообразен. Если

сформировать единый заказ не так сложно, то сортировка его после покупки и предоставление каждому покупателю возможности забрать свой заказ потребует, скорее всего, больших временных затрат. Довольно сложно будет найти того, кто согласится нести такие значительные организационные издержки даже за вознаграждение.
2) Даже если найдется тот, кто готов будет взять на себя все организационные расходы за некоторое вознаграждение, размер этого вознаграждения может быть столь существенной долей в расходах каждого, что соседи сочтут невыгодным участвовать в совместных покупках.
3) Довольно часто магазины расположены рядом с местом проживания, а покупки совершаются не запланировано, «по дороге». Поэтому люди могут счесть расходы (временные, организационные и т.п.) на совместные покупки значительными по сравнению с самостоятельными покупками в близлежащих магазинах.
4) Могут возникать и спорные вопросы между соседями, связанные с распределением расходов на доставку товаров, ведь набор товаров по весу и стоимости может оказаться весьма различным. Как именно в этом случае должны быть распределены расходы на доставку товаров? Будет довольно сложно соседям договориться между собой о едином справедливом подходе к распределению этих расходов.

Критерии проверки:
(а) Приведен один аргументированный ответ, указывающий на экономические факторы, – 7 баллов.
Любой другой дополнительный аргументированный ответ, указывающий на экономические факторы, - 3 балла.
(б) Приведен один аргументированный ответ, указывающий на экономические факторы, – 7 баллов.
Любой другой дополнительный аргументированный ответ, указывающий на экономические факторы, - 3 балла.

Задача 4. 25 балов

Начинающий экономист-криптограф получил от правителя криптограмму, в которой был очередной секретный указ о введении потоварного налога на некотором рынке. В криптограмме была указана сумма налоговых поступлений, которую необходимо собрать. Также особый акцент был сделан на том, что бóльшую сумму налоговых поступлений на данном рынке собрать невозможно. К сожалению, экономист-криптограф расшифровал криптограмму с ошибкой – цифры в сумме налоговых поступлений были определены им в неправильном порядке. Основываясь на ошибочных данных, было принято решение ввести потоварный налог на производителя в размере 90 денежных единиц за единицу товара. Известно, что рыночный спрос имеет вид $Qd = 688 - 4P$, а рыночное предложение линейно. В ситуации, когда никаких налогов нет, в точке равновесия ценовая эластичность рыночного предложения в 1,5 раза выше модуля ценовой эластичности рыночной функции спроса. После того как был введён налог, цена производителя сократилась до 64 денежных единиц.
1) Восстановите функцию рыночного предложения.
2) Определите величину налоговых поступлений, которые были собраны при выбранной ставке.

3) Определите ставку количественного налога, которая позволила бы достичь указа правителя.
4) Чему равны налоговые сборы, которые указал собрать правитель?

Решение:
1) Пусть функция предложения линейна $Q_s = c + dP$. Известно, что $1{,}5 \cdot |E_p^d| = E_p^s$. Воспользуемся определением ценовой эластичности для линейных функций спроса $1{,}5 \cdot \frac{4P_e}{Q_e} = \frac{dP_e}{Q\_e}$. Находим, что $d = 6$. Если ввести потоварный налог $t = 90$, то $P_s = 64$.Тогда $688 - 4(P_s + 90) = 6P_s + c$; $0{,}1c + 32.8 = P_s = 64$; $c = -312$.

Функция рыночного предложения имеет вид $Q_s = 6P - 312$.

2) Известно, что $P_s(t = 90) = 64$. Значит, $Q_s = 6P - 312 = 72$. Тогда доходы правительства составят $T = 72 \cdot 90 = 6480$.

3) Пусть $P_s = P_d - t$, $688 - 4P_d = 6P_d - 6t - 312$, $P_d = 100 + 0{,}6t$; $Q_d = 288 - 2{,}4t$. Налоговые поступления составят $T = Q \cdot t = 288t - 2{,}4t^2$. График функции представляет собой параболу, с ветвями вниз, максимум функции достигается при $t^* = 60$.

4) $T_{max} = 288 \cdot 60 - 2{,}4 \cdot 60 \cdot 60 = 8640$.

Критерии проверки:
1) Верно определен наклон у кривой предложения - 3 балла.
Верно определена цена покупки при неправильном налоге - 1 балл.
Верно определен объем продажи при неправильном налоге - 2 балла.
Верно определен свободный коэффициент у кривой предложения - 3 балла.
Верно найдена функция предложения - 1 балл.
Если при решении допущена ошибка/описка, которая приводит к результатам, противоречащим экономической логике, то выставляется только 3 балла за этот пункт при верном (в остальном) ходе решения.
2) Верно найдены налоговые сборы - 3 балла.
3) Объяснено, как искать ставку, дающую максимальные налоговые сборы - 4 балла.
Найдена ставка, дающая максимальные налоговые сборы - 4 балла. Если при нахождении ставки был получен результат, противоречащий логике, то даже при верном значении t эти 4 балла не выставляются.
4) Найдено количество товара, которое будет продано при ставке, дающей максимальные налоговые сборы - 2 балла. Если при нахождении количества был получен результат, противоречащий логике, то даже при верном значении t эти 2 балла не выставляются.
Найдены налоговые сборы при этом налоге - 2 балла. Если налоговые сборы найдены, но их значение не соотносится с условием задачи о перепутанных цифрах, то эти 2 балла не выставляются.

Штрафы:
Допущена арифметическая ошибка при вычислениях, которая не привела в дальнейшем к результатам, противоречащим экономической логике – 1 балл.

Не обосновано, что полученное значение налоговой ставки в пункте 3) дает именно максимум, а не минимум целевой функции.

Задача 5. 25 балов

Спрос на продукцию фирмы имеет вид $Qd = 240 - P$. Товар данной фирмы можно производить только на специальном заводе, стоимость открытия которого составляет 100 денежных единиц. Производство Q единиц продукции на данном заводе обходится в $4Q^2$ денежных единиц.

1. Определите, чему равна максимальная прибыль фирмы, если фирма может открыть только 1 завод.
2. Предположим, что изначально фирма могла открыть не более 2 заводов. Чему равна максимальная прибыль в этом случае? Будет ли фирма открывать второй завод?
3. Предположим, что изначально фирма могла открыть любое количество заводов данного типа. Чему равна максимальная прибыль фирмы в таком случае? Сколько заводов следует открыть фирме?

Решение:

1. Функция прибыли при одном заводе в зависимости от объема выпускаемой продукции имеет вид

$PR = TR - TC = 240Q - Q^2 - 4Q^2 - 100$. График функции представляет собой параболу с ветвями вниз, максимум функции достигается при $Q^* = 24$. $PR_{max} = 2780$.

2. Фирма будет готова открыть два завода, если прибыль увеличится относительно ситуации в пункте 1. Предположим, что фирма имеет два завода и издержки на открытие уже понесены. Какой бы фиксированный объем продукции ни выпускала фирма, максимальная прибыль может быть получена только, если издержки для производства совокупного объёма продукции минимальны. Действительно, если бы издержки оказались не минимальными при данном объеме выпуска, фирма могла бы снизить издержки, увеличив тем самым прибыль. Таким образом, минимизация издержек является необходимым условием максимизации прибыли фирмы.

Для каждого завода функция $VC'_Q(Q)$ является возрастающей и совпадает, а потому минимальный объём издержек для некоторого совокупного объёма производства Q достигается при условии $Q_1 = Q_2 = 0{,}5Q$. Действительно, предположим, фирма предполагает выпустить на каждом заводе $Q_1 > Q_2$, тогда в силу эквивалентности возрастающих функций $VC_1\left(Q_1\right)$ и $VC_2(Q_2)$ можно сделать вывод, что $MC_1(Q_1) > MC_2(Q_2)$. Перераспределяя продукцию с первого завода в пользу второго, совокупные издержки будут уменьшаться, так как предельные затраты перераспределенной единицы на втором заводе меньше, чем на первом. Такое перераспределение выпусков и снижение совокупных издержек возможно до момента, пока не выполнится равенство $Q_1 = Q_2$.

$TC = 4(0{,}5Q)^2 + 4(0{,}5Q)^2 + 200 = 2Q^2 + 200.$

Функция прибыли имеет вид $PR = 240Q - Q^2 - 2Q^2 - 200$. График этой функции относительно объема выпуска представляет собой параболу с ветвями вниз, максимум функции достигается при $Q^* = 40$. $PR_{max} = 4600$. Прибыль с двумя заводами выше, чем прибыль с одним заводом, а значит имеет смысл открывать второй завод.

3. Заметим, что при любом данном объеме выпускаемой продукции (и связанной с этим объемом выручки фирмы) совокупные издержки фирмы (а следовательно, и ее прибыль) зависят только от того, сколько заводов использовала фирма и как она распределила выпуски между этими заводами. И наоборот, при любом количестве заводов у фирмы и оптимальном распределении выпусков на них прибыль фирмы будет зависеть только от того, какое количество товара она произведет. Поэтому максимизация прибыли в данных условиях - это осуществление двух действий: выбор оптимального объёма продукции и выбор количества заводов, которое стоит открыть. Порядок действий не влияет на итоговый ответ в силу причин, указанных выше. Продемонстрируем два подхода, которые приводят к верному решению задачи. Согласно первому подходу сначала можно определить функцию, обеспечивающую минимальный объём затрат при каждом объёме продукции, а после этого, с учетом данной функции выбрать оптимальный объём продукции, максимизирующий прибыль. Второй подход заключается в первоочередном определении зависимости оптимального объёма продукции от количества открытых заводов и дальнейшего поиска оптимального количества заводов, которое позволяет получить максимальную прибыль.

1) Функция издержек при открытии n заводов – функция, показывающая минимальный уровень затрат, который необходимо понести для производства Q единиц продукции (см. пояснения в пункте 1. решения задачи). Результат полученный для двух заводов $Q_1 = Q_2 = \frac{Q}{n}$ может быть легко экстраполирован для N заводов: если предельные издержки при некотором распределении выпусков между заводами на каком-то заводе меньше, чем на любом другом, то имеет смысл перераспределять продукцию до момента пока не будет достигнуто равенство $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n = \frac{Q}{n}$.

Суммарная функция издержек имеет вид $TC = 4\left(\frac{Q}{n}\right)^2 + 4\left(\frac{Q}{n}\right)^2 + \dots + 4\left(\frac{Q}{n}\right)^2 + 100n.$

Раскрыв скобки, получаем, что $TC = \frac{4Q^2}{n^2} \cdot n + 100n = \frac{4Q^2}{n} + 100n$. Заметим, что для $Q = const$ всегда можно найти такое количество заводов n, что TC будет достигать минимального значения. $TC'_n = 100 - \frac{4Q^2}{n^2} = 0, n = 0{,}2Q$. При $Q > 0$, значения функции TC' меняют знак с $-$ на $+$, а значит $n = 0{,}2Q$ позволяет обеспечить минимальные значения TC при любой Q. $TC = 100 \cdot 0{,}2Q + \frac{4Q^2}{0{,}2Q} = 40Q$.

Составим функцию прибыли $PR = 240Q - Q^2 - 40Q = 200Q - Q^2$. График этой функции относительно объема выпускаемой продукции представляет собой параболу с ветвями вниз, максимум функции достигается при $Q^* = 100$. $PR_{max} = 10000$. Оптимальное количество заводов составляет $n = 20$.

2) Логика распределения продукции между заводами применима и здесь, а потому $TC = \frac{4Q^2}{n^2} \cdot n + 100n = \frac{4Q^2}{n} + 100n$. Составим функцию прибыли

$PR = 240Q - Q^2 - \frac{4Q^2}{n} - 100n$. Предположим, что количество заводов фиксировано и найдём оптимальное значение Q для каждого n. График этой функции относительно объема выпускаемой продукции – парабола с ветвями направленными вниз относительно Q, максимум в вершине, $Q^* = \frac{240n}{2n+8}$. Подставив оптимальное значение объёма в функцию прибыли получаем, что $PR = \frac{14400n}{n+4} - 100n$. Найдём оптимальное количество заводов. $PR'_n = \frac{14400}{(n+4)^2} - 100 = 0$, $n_1 = -28$, $n_2 = 20$. Очевидно, что количество заводов число неотрицательное. В точке $n_2 = 20$ производная меняет знак с + на –, значит максимальная прибыль достигается при открытии 20 заводов. $PR = \frac{14400 \cdot 20}{20+4} - 100 \cdot 20 = 10000$

Критерии проверки:

1) Верно найден оптимальный выпуск или оптимальная цена - 2 балла.

Верно найдена прибыль фирмы, имеющий один завод - 1 балл.

2) Верно объяснено, как нужно распределить выпуски между заводами - 3 балла.

Верно найдено распределение выпусков между заводами- 4 балла.

Верно найден оптимальный выпуск или оптимальная цена - 1 балл.

Верно найдена прибыль фирмы с двумя заводами - 1 балл.

Приведено сравнение прибыли и сделан вывод - 1 балл.

Если решение о разделении выпуска между заводами было концептуально неверным, то за решение пункта 2) ставится не более 1 балла за сравнение прибыли.

3) Верно выписана прибыль фирмы при произвольном количестве заводов - 1 балл.

Корректно решена задача максимизации прибыли при верном распределении выпусков между заводами - 6 баллов.

За идею максимизации прибыли по количеству заводов n либо за пояснения, почему можно минимизировать издержки по количеству заводов n - 3 балла (при отсутствии таких пояснений за эту часть решения выставляется - 0 баллов).

Верно найдено количество заводов - 1 балл. Если верное количество заводов было получено случайно при концептуально неверном решении, то баллы за эту часть решения не выставляются.

Верно найдена прибыль с этим количеством заводов - 1 балл.

Если решение о разделении выпуска между заводами было концептуально неверным, то за пункт 3) ставится только 3 балла при условии, что есть идея о максимизации прибыли по количеству заводов n или идея о минимизации издержек по количеству заводов n.

Штрафы:

За каждую арифметическую ошибку оценка за это задание снижается на 1 балл, если допущенная ошибка не привела к результату, противоречащему экономической логике.

За отсутствие обоснования максимума функции оценка за это задание снижается на 1 балл (за пункты 1. и 2. участник штрафуется только один раз, даже если в каждом пункте обоснование отсутствовало и не штрафуется, если хотя бы в одном пункте это обоснование присутствовало).

За отсутствие обоснования минимума функции оценка за это задание снижается на 1 балл.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации

Олимпиада школьников РАНХиГС по Экономике

10 - 11 класс

2021 – 2022 учебный год

Заключительный этап

Вариант 3.

Задача 1. 15 балов

Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{x^2-\sqrt{3}\cdot|x|+1}+\sqrt{x^2+\sqrt{3}\cdot|x|+3},$$

а также значения x, при которых оно достигается.

Решение:

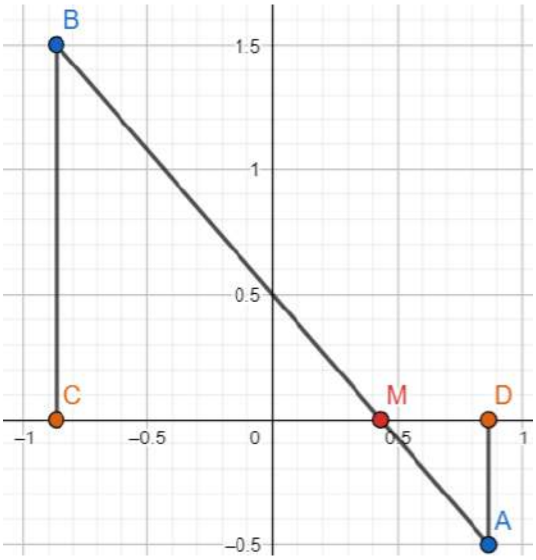
Обозначим $t=|x|\geq 0$. Тогда требуется найти наименьшее значение функции

$$f(t)=\sqrt{t^2-\sqrt{3}\cdot t+1}+\sqrt{t^2+\sqrt{3}\cdot t+3}$$

при $t\geq 0$. Преобразуем вид функции $f(t)$ к виду:

$$f(t)=\sqrt{\left(t-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}+\sqrt{\left(t+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{9}{4}}.$$

Пусть заданы точки $M(t,0)$, $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$. Нетрудно понять, что рассматриваемое выражение есть не что иное, как сумма длин отрезков AM и BM, то есть $f(t)=AM+BM$. Если точка M не лежит на отрезке AB, то $AM+BM>AB$. В то же время, если $M\in AB$, то $AM+BM=AB$, значит, сумма $AM+BM$ принимает наименьшее значение, если и только если точка M лежит на отрезке AB. Итак, точка M является точкой пересечения отрезка AB с осью Ox.



Для нахождения координат точки M рассмотрим подобные треугольники MDA и MCB:

$$\frac{MD}{CM}=\frac{AD}{BC}=\frac{1}{3}.$$

Поэтому, если $MD=a,$ то $MC=3a$ и отсюда

$$CD=\sqrt{3}=MD+MC=a+3a=4a,$$

$$a=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Отсюда находим координаты точки $M\left(\frac{\sqrt{3}}{4},0\right)$. Итак, наименьшее значение функции $f(t)$ достигается при $t=|x|=\frac{\sqrt{3}}{4}$ и равно:

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\sqrt{\frac{3}{16}+\frac{1}{4}}+\sqrt{\frac{27}{16}+\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{4}+\frac{3\sqrt{7}}{4}=\sqrt{7}.$$

Ответ: $\sqrt{7}$ при $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{4}$

Критерии:

1. Наличие обоснованного решения и правильного ответа – 15 баллов.
2. Наличие обоснованного решения, однако, полученный ответ отличается от правильного ответа в результате арифметических вычислений – 10 баллов.
3. Имеется идея решения, задача сведена к исследованию суммы расстояний, однако, решение не доведено до конца – 5 баллов.
4. В остальных случаях – 0 баллов.

Задача 2. 15 балов

Известно, что касательные к графику целевой функции $y=a(x+2)^2+2$, проведенные из точки $M(x_0\,;y_0)$ пересекаются под прямым углом. Восстановите вид целевой функции, если известно, что координаты точки $M(x_0\,;y_0)$ удовлетворяют соотношению:

$$\log_{x-x^2+3}(y-6)=\log_{x-x^2+3}\frac{|2x+6|-|2x+3|}{3x+7{,}5}\sqrt{x^2+5x+6{,}25}.$$

Решение

Преобразуем $y-2=a(x+2)^2$ и заменим *u=y-2; z=x+2* так что $u=az^2$. Пусть $A(z_1\,;az_1)$ и $B(z_2\,;az_2)$ точки параболы $u=az^2$ и пусть касательные в точках A и B пересекаются в точке $(z_0;u_0)$.

Запишем уравнение касательной в точке *A:* $u-u_1=2az_1(z-z_1)$, где $u_1=az_1^2$.

Так как эта прямая проходит через точку $(z_0;u_0)$, то $u_0-az_1^2\ =2az_1(z_0-z_1)$ или $u_0=2az_0z_1-az_1^2$.

Аналогично получаем соотношение для касательной в точке *B*: $u_0=2az_0z_2-az_2^2$.

Вычитая эти соотношения, получаем: $z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}$. Подставляя это значение в одно из предыдущих соотношений, получаем: $u_0 = az_1z_2$.

Для угловых коэффициентов перпендикулярных прямых имеем: $-1 = k_1k_2 = 2az_1 2az_2 = 4au_0$.

Отсюда $a = -\frac{1}{4u_0} = -\frac{1}{4(y_0 - 2)}$.

Значение y_0 найдем из соотношения: $\log_{x-x^2+3}(y-6) = \log_{x-x^2+3} \frac{|2x+6|-|2x+3|}{3x+7,5}\sqrt{x^2+5x+6,25}$.

ОДЗ: y >6; $x - x^2 + 3 > 0$; $\frac{|2x+6|-|2x+3|}{3x+7,5}\sqrt{x^2+5x+6,25} > 0$ И далее:

$\begin{cases} y > 6 \\ x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \end{cases}$. Потенциируя логарифмическое выражение, получим:

$y - 6 = \frac{|x+3|-|x+1,5|}{1,5} \cdot \frac{|x+2,5|}{x+2,5}$. Выражение справа в области определения принимает значение 1. Таким образом, получаем: $\begin{cases} y_0 - 6 = 1 \\ x_0 \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \end{cases}$. Отсюда имеем:

$$a = -\frac{1}{4(y_0 - 2)} = -\frac{1}{20} = -0,05$$

и функция

y= - 0,05(x+2)^2*+2*

Ответ: *y= - 0,05(x+2)*^{2}*+2*

Критерий

- приведено верное решение задачи и получен правильный ответ (вид функции) – 15 баллов,
- приведено верное решение задачи, но получен неправильный ответ или нет ответа – 8 баллов,
- ошибка в решении, но получен правильный ответ (вид функции) – 7 баллов,
- решение неверное или решение отсутствует, при этом получен правильный ответ (вид функции) – 1 балл,
- решение неверное или решение отсутствует, при этом получен неправильный ответ, или нет ответа – 0 баллов.

Задача 3. 20 балов

Приобретение товаров в розницу, но по оптовым ценам называют совместными покупками, если люди кооперируются, покупая товары у поставщиков без наценки.

Практика совместных покупок стала популярна в России в середине 2000-х годов и используется и в настоящее время. Покупатели объединяются на специализированных сайтах или в социальных сетях. В каждой закупке у поставщиков прописаны условия приобретения товаров. Например, указаны сроки поставки, минимальная сумма заказа, условия возврата бракованного товара. Те, кто выполняет роль организаторов покупок, договариваются с поставщиками, заказывают, оплачивают и сортируют товар, а затем отправляют товар по почте или отвозят его в пункт выдачи, где его и получают заказчики, участвующие в совместной покупке. Организаторы получают некоторый процент за свои услуги и, ориентируясь на свой опыт работы с конкретным поставщиком, всегда информируют заказчиков велик ли риск поставки товаров не того цвета или размера, и как правило, они не несут ответственности за риск потери груза в пути, конфискацию его на таможне и т.п.

(а) Почему, несмотря на описанные риски, практика совместных покупок популярна во многих странах? Объясните.

(б) Почему подобная практика совместных покупок не популярна, например, среди жильцов одного дома, подъезда, этажа при заказе продуктов и бытовых товаров из супермаркетов, ведь в этом случае покупатели могли бы существенно сэкономить на доставке товаров? Объясните.

Решение:

(а) Приведем несколько факторов, которые могут объяснить выгодность подобных покупок.

1) Совместные закупки позволяют значительно сэкономить на приобретении товаров, поскольку фактически осуществляются по оптовым ценам, а накладные расходы, связанные с доставкой товара до покупателя и оплатой услуг организаторов этой покупки оказываются незначительными, так как распределены между всеми участниками группы.

2) Большая группа потребителей совместно, делясь друг с другом информацией об уже приобретенных ранее товарах, может более точно оценить качество товара, чем каждый из покупателей по отдельности. Это позволяет им выбирать лучшие варианты, а при необходимости обмениваться друг с другом товарами.

3) Как правило, внутри таких сообществ люди более охотно делятся друг с другом объективной информацией о товарах, организаторах и поставщиках. Поэтому даже если при совместной покупке и возникают издержки, связанные с описанными рисками, покупатели готовы заплатить за покупку у тех, чья репутация оказывается выше, чья репутация может свидетельствовать о качестве приобретаемого товара.

(б) Приведем несколько факторов, которые могут объяснить невыгодность совместных бытовых покупок среди покупателей, проживающих неподалеку друг от друга.

1) Даже если соседи смогут договориться о временно́м регламенте подобных закупок, будут возникать значительные трансакционные издержки, которые может нести организатор этих закупок. Набор продуктов каждого соседа может быть очень разнообразен. Если

сформировать единый заказ не так сложно, то сортировка его после покупки и предоставление каждому покупателю возможности забрать свой заказ потребует, скорее всего, больших временных затрат. Довольно сложно будет найти того, кто согласится нести такие значительные организационные издержки даже за вознаграждение.
2) Даже если найдется тот, кто готов будет взять на себя все организационные расходы за некоторое вознаграждение, размер этого вознаграждения может быть столь существенной долей в расходах каждого, что соседи сочтут невыгодным участвовать в совместных покупках.
3) Довольно часто магазины расположены рядом с местом проживания, а покупки совершаются не запланировано, «по дороге». Поэтому люди могут счесть расходы (временные, организационные и т.п.) на совместные покупки значительными по сравнению с самостоятельными покупками в близлежащих магазинах.
4) Могут возникать и спорные вопросы между соседями, связанные с распределением расходов на доставку товаров, ведь набор товаров по весу и стоимости может оказаться весьма различным. Как именно в этом случае должны быть распределены расходы на доставку товаров? Будет довольно сложно соседям договориться между собой о едином справедливом подходе к распределению этих расходов.

Критерии проверки:
(а) Приведен один аргументированный ответ, указывающий на экономические факторы, – 7 баллов.
Любой другой дополнительный аргументированный ответ, указывающий на экономические факторы, - 3 балла.
(б) Приведен один аргументированный ответ, указывающий на экономические факторы, – 7 баллов.
Любой другой дополнительный аргументированный ответ, указывающий на экономические факторы, - 3 балла.

Задача 4. 25 балов

Начинающий экономист-криптограф получил от правителя криптограмму, в которой был очередной секретный указ о введении потоварного налога на некотором рынке. В криптограмме была указана сумма налоговых поступлений, которую необходимо собрать. Также особый акцент был сделан на том, что бóльшую сумму налоговых поступлений на данном рынке собрать невозможно. К сожалению, экономист-криптограф расшифровал криптограмму с ошибкой – цифры в сумме налоговых поступлений были определены им в неправильном порядке. Основываясь на ошибочных данных, было принято решение ввести потоварный налог на производителя в размере 90 денежных единиц за единицу товара. Известно, что рыночный спрос имеет вид $Qd = 688 - 4P$, а рыночное предложение линейно. В ситуации, когда никаких налогов нет, в точке равновесия ценовая эластичность рыночного предложения в 1,5 раза выше модуля ценовой эластичности рыночной функции спроса. После того как был введён налог, цена производителя сократилась до 64 денежных единиц.
1) Восстановите функцию рыночного предложения.

2) Определите величину налоговых поступлений, которые были собраны при выбранной ставке.
3) Определите ставку количественного налога, которая позволила бы достичь указа правителя.
4) Чему равны налоговые сборы, которые указал собрать правитель?

Решение:
1) Пусть функция предложения линейна $Q_s = c + dP$. Известно, что $1{,}5 \cdot |E_p^d| = E_p^s$. Воспользуемся определением ценовой эластичности для линейных функций спроса $1{,}5 \cdot \frac{4P_e}{Q_e} = \frac{dP_e}{Q\_e}$. Находим, что $d = 6$. Если ввести потоварный налог $t = 90$, то $P_s = 64$.Тогда $688 - 4(P_s + 90) = 6P_s + c$; $0{,}1c + 32.8 = P_s = 64$; $c = -312$.

Функция рыночного предложения имеет вид $Q_s = 6P - 312$.

2) Известно, что $P_s(t = 90) = 64$. Значит, $Q_s = 6P - 312 = 72$, Тогда доходы правительства составят $T = 72 \cdot 90 = 6480$.

3) Пусть $P_s = P_d - t$, $688 - 4P_d = 6P_d - 6t - 312$, $P_d = 100 + 0{,}6t$; $Q_d = 288 - 2{,}4t$. Налоговые поступления составят $T = Q \cdot t = 288t - 2{,}4t^2$. График функции представляет собой параболу, с ветвями вниз, максимум функции достигается при $t^* = 60$.

4) $T_{max} = 288 \cdot 60 - 2{,}4 \cdot 60 \cdot 60 = 8640$.

Критерии проверки:
1) Верно определен наклон у кривой предложения - 3 балла.
Верно определена цена покупки при неправильном налоге - 1 балл.
Верно определен объем продажи при неправильном налоге - 2 балла.
Верно определен свободный коэффициент у кривой предложения - 3 балла.
Верно найдена функция предложения - 1 балл.
Если при решении допущена ошибка/описка, которая приводит к результатам, противоречащим экономической логике, то выставляется только 3 балла за этот пункт при верном (в остальном) ходе решения.
2) Верно найдены налоговые сборы - 3 балла.
3) Объяснено, как искать ставку, дающую максимальные налоговые сборы - 4 балла.
Найдена ставка, дающая максимальные налоговые сборы - 4 балла. Если при нахождении ставки был получен результат, противоречащий логике, то даже при верном значении t эти 4 балла не выставляются.
4) Найдено количество товара, которое будет продано при ставке, дающей максимальные налоговые сборы - 2 балла. Если при нахождении количества был получен результат, противоречащий логике, то даже при верном значении t эти 2 балла не выставляются.
Найдены налоговые сборы при этом налоге - 2 балла. Если налоговые сборы найдены, но их значение не соотносится с условием задачи о перепутанных цифрах, то эти 2 балла не выставляются.

Штрафы:
Допущена арифметическая ошибка при вычислениях, которая не привела в дальнейшем к результатам, противоречащим экономической логике – 1 балл.
Не обосновано, что полученное значение налоговой ставки в пункте 3) дает именно максимум, а не минимум целевой функции.

Задача 5. 25 балов

Спрос на продукцию фирмы имеет вид $Qd = 120 - 0{,}5P$. Товар данной фирмы можно производить только на специальном заводе, стоимость открытия которого составляет 25 денежных единиц. Производство Q единиц продукции на данном заводе обходится в $4Q^2$ денежных единиц.

1. Определите, чему равна максимальная прибыль фирмы, если фирма может открыть только 1 завод.
2. Предположим, что изначально фирма могла открыть не более 2 заводов. Чему равна максимальная прибыль в этом случае? Будет ли фирма открывать второй завод?
3. Предположим, что изначально фирма могла открыть любое количество заводов данного типа. Чему равна максимальная прибыль фирмы в таком случае? Сколько заводов следует открыть фирме?

Решение:

1. Функция прибыли при одном заводе в зависимости от объема выпускаемой продукции имеет вид

$PR = TR - TC = 240Q - 2Q^2 - 4Q^2 - 25$. График функции представляет собой параболу с ветвями вниз, максимум функции достигается при $Q^* = 20$. $PR_{max} = 2375$.

2. Фирма будет готова открыть два завода, если прибыль увеличится относительно ситуации в пункте 1. Предположим, что фирма имеет два завода и издержки на открытие уже понесены. Какой бы фиксированный объем продукции ни выпускала фирма, максимальная прибыль может быть получена только, если издержки для производства совокупного объёма продукции минимальны. Действительно, если бы издержки оказались не минимальными при данном объеме выпуска, фирма могла бы снизить издержки, увеличив тем самым прибыль. Таким образом, минимизация издержек является необходимым условием максимизации прибыли фирмы.

Для каждого завода функция $VC'_Q(Q)$ является возрастающей и совпадает, а потому минимальный объём издержек для некоторого совокупного объёма производства Q достигается при условии $Q_1 = Q_2 = 0{,}5Q$. Действительно, предположим, фирма предполагает выпустить на каждом заводе $Q_1 > Q_2$, тогда в силу эквивалентности возрастающих функций $VC_1(Q_1)$ и $VC_2(Q_2)$ можно сделать вывод, что $MC_1(Q_1) > MC_2(Q_2)$. Перераспределяя продукцию с первого завода в пользу второго, совокупные издержки будут уменьшаться, так как предельные затраты перераспределенной единицы на втором заводе меньше, чем на первом. Такое перераспределение выпусков и снижение совокупных издержек возможно до момента, пока не выполнится равенство $Q_1 = Q_2$.

$TC = 4(0{,}5Q)^2 + 4(0{,}5Q)^2 + 50 = 2Q^2 + 50.$

Функция прибыли имеет вид $PR = 240Q - 2Q^2 - 2Q^2 - 50$. График этой функции относительно объема выпуска представляет собой параболу с ветвями, направленными вниз, максимум функции достигается при $Q^* = 30$, $PR_{max} = 3550$. Прибыль с двумя заводами выше, чем прибыль с одним заводом, а значит имеет смысл открывать второй завод.

3. Заметим, что при любом данном объеме выпускаемой продукции (и связанной с этим объемом выручки фирмы) совокупные издержки фирмы (а следовательно, и ее прибыль) зависят только от того, сколько заводов использовала фирма и как она распределила выпуски между этими заводами. И наоборот, при любом количестве заводов у фирмы и оптимальном распределении выпусков на них прибыль фирмы будет зависеть только от того, какое количество товара она произведет. Поэтому максимизация прибыли в данных условиях - это осуществление двух действий: выбор оптимального объёма продукции и выбор количества заводов, которое стоит открыть. Порядок действий не влияет на итоговый ответ в силу причин, указанных выше. Продемонстрируем два подхода, которые приводят к верному решению задачи. Согласно первому подходу сначала можно определить функцию, обеспечивающую минимальный объём затрат при каждом объёме продукции, а после этого, с учетом данной функции выбрать оптимальный объём продукции, максимизирующий прибыль. Второй подход заключается в первоочередном определении зависимости оптимального объёма продукции от количества открытых заводов и дальнейшего поиска оптимального количества заводов, которое позволяет получить максимальную прибыль.

1) Функция издержек при открытии n заводов – функция, показывающая минимальный уровень затрат, который необходимо понести для производства Q единиц продукции (см. пояснения в пункте 1. решения задачи). Результат полученный для двух заводов $Q_1 = Q_2 = \frac{Q}{n}$ может быть легко экстраполирован для N заводов: если предельные издержки при некотором распределении выпусков между заводами на каком-то заводе меньше, чем на любом другом, то имеет смысл перераспределять продукцию до момента пока не будет достигнуто равенство $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n = \frac{Q}{n}$.

Суммарная функция издержек производителя тогда имеет вид $TC = 4\left(\frac{Q}{n}\right)^2 + 4\left(\frac{Q}{n}\right)^2 + \dots + 4\left(\frac{Q}{n}\right)^2 + 25n.$

Раскрыв скобки, получаем, что $TC = \frac{4Q^2}{n^2} \cdot n + 25n = \frac{4Q^2}{n} + 25n$. Заметим, что для фиксированного Q всегда можно найти такое количество заводов n, что TC будет достигать минимального значения. $TC'_n = 25 - \frac{4Q^2}{n^2} = 0, n = 0{,}4Q$. При $Q > 0$, значения функции TC' меняют знак с – на +, а значит $n = 0{,}4Q$ позволяет обеспечить минимальные значения TC при любой Q. $TC = 25 \cdot 0{,}4Q + \frac{4Q^2}{0{,}4Q} = 20Q$. Получив функцию издержек, обеспечивающую минимальный уровень затрат, можно выбрать объём продукции максимизирующий прибыль.

Составим функцию прибыли $PR = 240Q - 2Q^2 - 20Q = 220Q - 2Q^2$. График этой функции относительно объема выпускаемой продукции представляет собой параболу с ветвями, направленными вниз, максимум функции достигается при $Q^* = 55$. $PR_{max} = 6050$. Оптимальное количество заводов составляет $n = 22$.

2) Логика распределения продукции между заводами применима и здесь, а потому $TC = \frac{4Q^2}{n^2} \cdot n + 25n = \frac{4Q^2}{n} + 25n$.

Составим функцию прибыли $PR = 240Q - 2Q^2 - \frac{4Q^2}{n} - 25n$. Предположим, что количество заводов фиксировано и найдём оптимальное значение Q для каждого n. График этой функции относительно объема выпускаемой продукции – парабола с ветвями, направленными вниз относительно Q, максимум в вершине, $Q^* = \frac{240n}{4n+8}$. Подставив оптимальное значение объёма в функцию прибыли получаем, что $PR = \frac{7200n}{n+2} - 25n$. Найдём оптимальное количество заводов. $PR'_n = \frac{14400}{(n+2)^2} - 25 = 0$, $n_1 = -26$, $n_2 = 22$. Очевидно, что количество заводов число неотрицательное. В точке $n_2 = 22$ производная меняет знак с + на –, значит максимальная прибыль достигается при открытии 22 заводов. $PR = \frac{7200 \cdot 22}{22+2} - 25 \cdot 22 = 6050$.

Критерии проверки:

1) Верно найден оптимальный выпуск или оптимальная цена - 2 балла.
Верно найдена прибыль фирмы, имеющий один завод - 1 балл.
2) Верно объяснено, как нужно распределить выпуски между заводами - 3 балла.
Верно найдено распределение выпусков между заводами- 4 балла.
Верно найден оптимальный выпуск или оптимальная цена - 1 балл.
Верно найдена прибыль фирмы с двумя заводами - 1 балл.
Приведено сравнение прибыли и сделан вывод - 1 балл.
Если решение о разделении выпуска между заводами было концептуально неверным, то за решение пункта 2) ставится не более 1 балла за сравнение прибыли.
3) Верно выписана прибыль фирмы при произвольном количестве заводов - 1 балл.
Корректно решена задача максимизации прибыли при верном распределении выпусков между заводами - 6 баллов.
За идею максимизации прибыли по количеству заводов n либо за пояснения, почему можно минимизировать издержки по количеству заводов n - 3 балла (при отсутствии таких пояснений за эту часть решения выставляется - 0 баллов).
Верно найдено количество заводов - 1 балл. Если верное количество заводов было получено случайно при концептуально неверном решении, то баллы за эту часть решения не выставляются.
Верно найдена прибыль с этим количеством заводов - 1 балл.
Если решение о разделении выпуска между заводами было концептуально неверным, то за пункт 3) ставится только 3 балла при условии, что есть идея о максимизации прибыли по количеству заводов n или идея о минимизации издержек по количеству заводов n.

Штрафы:

За каждую арифметическую ошибку оценка за это задание снижается на 1 балл, если допущенная ошибка не привела к результату, противоречащему экономической логике.

За отсутствие обоснования максимума функции оценка за это задание снижается на 1 балл (за пункты 1. и 2. участник штрафуется только один раз, даже если в каждом пункте обоснование отсутствовало и не штрафуется, если хотя бы в одном пункте это обоснование присутствовало).

За отсутствие обоснования минимума функции оценка за это задание снижается на 1 балл.