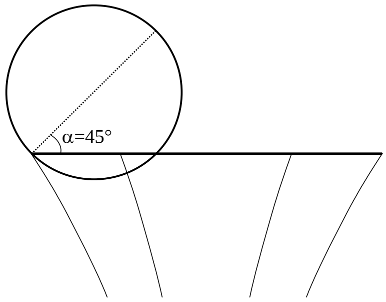
10-11 класс

З а д а н и е 1. (20 баллов) Баскетбольный мяч катится вдоль дужки кольца со скоростью v. Положение мяча относительно кольца показано на Рисунке. При каком минимальном значении v мяч не упадёт в кольцо? Радиусы мяча и кольца равны 23 см и 12 см, соответственно. Сечение дужки кольца принять кругом, размер которого пренебрежимо мал по сравнению с мячом. Вектор начальной скорости мяча считать горизонтальным, а модуль скорости – постоянной величиной.

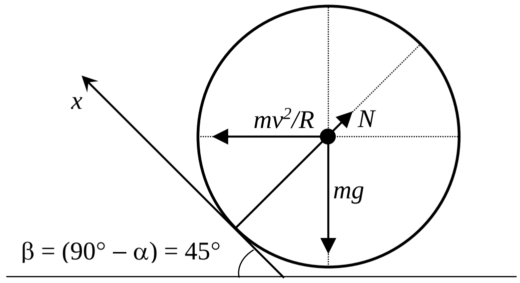


Решение

К сожалению, в формулировке задачи значения радиусов мяча и кольца ошибочно переставлены местами. Как рисунок, так и физический смысл задачи предполагают, что радиус мяча должен быть меньшим, чем радиус кольца. То есть, радиус мяча должен был быть указан равным 12 см, тогда как кольца – 23 см. При проверке задачи, считаем оба выбора радиусов мяча и кольца допустимыми. Баллы выставляем за правильность решения задачи в соответствии с выбранными радиусами.

Решение для случая $R_{мяча}$ = 12 см, $R_{кольца}$ = 23 см

В точке соприкосновения мяча с дужкой кольца к мячу приложена сила реакции опоры, направленная к его центру. Эта и другие силы, приложенные к мячу, показаны на Рисунке (**4 балла за построение силы тяжести, 6 баллов – за построение центробежной силы либо за правильное рассмотрение центробежного ускорения**).



Минимальная скорость, при которой мяч не падает в кольцо – это скорость, обеспечивающая отсутствие его смещения вдоль оси x, перпендикулярной силе реакции опоры. Определить эту скорость можно, например, следующими двумя путями:

Способ 1: сумма проекций гравитационной и центробежной сил должна быть равна нулю (**4 балла**):

$$m \cdot \frac{v^2}{R} \sin(\alpha) - mg \cdot \cos(\alpha) = 0$$

Способ 2: сумма моментов гравитационной и центробежной сил относительно точки соприкосновения мяча с поверхностью дужки кольца должна быть равна нулю, вследствие чего мяч не будет катиться вдоль оси x (**4 балла**). Результат получается фактически тем же, что и при первом способе:

$$m\cdot\frac{v^2}{R}\sin(\alpha)\cdot R_{мяча} - mg\cdot\cos(\alpha)\cdot R_{мяча} = 0,$$

откуда

$$v_{\min} = \sqrt{gR\cdot\mathrm{ctg}(\alpha)}.$$

Важно учитывать то, что как гравитационная, так и центробежная силы приложены к центру мяча, так что R при расчёте центробежной силы и под корнем в последней формуле – это расстояние до центра мяча от оси кольца:

$$R = R_{кольца} - R_{мяча}\cdot\cos(\alpha)\ \textbf{(2 балла)}.$$

Получается R = 14.5 см (**2 балла**).
При подстановке в расчётную формулу, радиус нужно выражать в метрах: R = 0.145 м.
Таким образом, **ответ:** $v = \sqrt{gR\cdot\mathrm{ctg}(\alpha)} = 1.19$ м/с (**2 балла**).

Решение для случая $R_{мяча}$ = 23 см, $R_{кольца}$ = 12 см

Если радиус мяча выбран большим, чем радиус кольца, то необходимо выяснить, сможет ли мяч катиться по кольцу при заданном значении угла α. Это было бы возможным, если бы радиус сечения мяча горизонтальной плоскостью, расположенной на уровне кольца (R), был бы меньшим, чем радиус кольца (**8 баллов**). Иначе расположить мяч под углом α просто не получится.

Значение искомого радиуса:

$$R = R_{мяча}\cdot\cos(\alpha)\ \textbf{(4 балла)}.$$

В настоящей задаче R = 16.3 см, что превышает радиус кольца (**4 балла**). Соответственно, реализовать условия задачи на практике невозможно (**4 балла**).
Ответ: расположить мяч под углом α = 45° относительно плоскости кольца невозможно.

Примечание: «большой» мяч мог бы прокатиться по дужке «маленького» кольца, если бы выполнялось условие

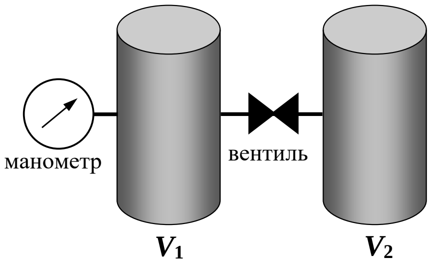
$$R_{кольца} > R_{мяча}\cdot\cos(\alpha).$$

Тогда, мяч вылетел бы из кольца при скорости

$$v > \sqrt{g\cdot\left(R_{кольца} - R_{мяча}\cdot\cos(\alpha)\right)\cdot\mathrm{ctg}(\alpha)},$$

либо остался бы в кольце при меньших скоростях. В последнем случае, мяч можно было бы считать «упавшим в кольцо», в отличие от вылетевшего из кольца.

Задание 2. (20 баллов) В объёме V_1, имеющем температуру T_1, находится идеальный газ. При закрытом вентиле манометр показывал в этом объёме давление P_0 (см. Рисунок). После измерения давления, объём V_1 соединяют с пустым объёмом V_2, температура которого T_2 в этот момент совпадает с температурой первого объёма T_1. В результате соединения объёмов, давление в объёме V_1, измеряемое манометром, понижается до значения $P_2 = 0.6\cdot P_0$. После соединения с объёмом V_1, температуру T_2 объёма V_2 медленно изменяют. Одновременно, изменяются и показания манометра. Температура первого объёма T_1 остаётся неизменной. При температуре T_2 = –23 °C манометр показывает давление P, равное $0.564\cdot P_0$. Найти температуру T_1.



Решение

1. При изотермическом соединении объёмов выполняется равенство

$$P_0 \cdot V_1 = P_2 \cdot \left(V_1 + V_2\right) \text{ **(2 балла)**},$$

откуда следует, что

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{P_0}{P_2} - 1 = \frac{2}{3}$$ **(2 балла,** за общую формулу либо числовое значение**)**.

2. После изменения температуры объёма V_2, количества молей газа в объёмах V_1 и V_2 (ν_1 и ν_2, соответственно) связаны соотношением

$$\frac{\nu_1 R T_1}{V_1} = \frac{\nu_2 R T_2}{V_2} = P$$ **(2 балла)**.

3. Суммарное количество молей газа (ν) в процессе изменения T_2 остаётся постоянным, равным количеству молей до изменения температуры. Следовательно,

$$\nu = \frac{P_0 \cdot V_1}{R T_1}, \text{ либо } \nu = \frac{P_2 \cdot \left(V_1 + V_2\right)}{R T_1}$$ **(2 балла)**.

При этом,

$$\nu = \nu_1 + \nu_2$$ **(1 балл)**.

Далее, возможны различные способы рассуждения, ведущие к ответу:
Способ 1

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 \Rightarrow \nu_2 = \frac{P_0 \cdot V_1}{R T_1} - \nu_1$$ **(1 балл)**.

Отсюда получаем, что

$$\frac{\nu_2 R T_2}{V_2} = \left(\frac{P_0 V_1}{R T_1} - \nu_1\right) \cdot \frac{R T_2}{V_2} = P$$ **(2 балла)**.

4. Как отмечено выше,

$$\nu_1 = \frac{P V_1}{R T_1},$$

откуда

$$\left(\frac{P_0 V_1}{R T_1} - \frac{P V_1}{R T_1}\right) \cdot \frac{R T_2}{V_2} = \left(P_0 - P\right) \cdot \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{T_2}{T_1} = P$$ **(4 балла)**.

Теперь,

$$T_1 = T_2 \cdot \left(\frac{P_0}{P} - 1\right) \cdot \left(\frac{P_0}{P_2} - 1\right)^{-1}$$ **(2 балла)**.

Подстановка значений даёт ответ

$$T_1 = \left(250.15\ \text{K}\right) \cdot \left(\frac{1}{0.564} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{0.6} - 1\right)^{-1} = \left(250.15\ \text{K}\right) \cdot \frac{0.773}{0.667} = 290\ \text{K}$$ **(2 балла)**.

Ответ: T_1 = 290 K.

Способ 2

Из формул, приведённых выше, следует, что

$$\frac{P_0V_1}{T_1} \sim \nu .$$

После изменения температуры объёма V_2, при новом давлении P, верны следующие соотношения:

$$\frac{PV_1}{T_1} = \frac{0.564 \cdot P_0V_1}{T_1} \sim \nu_1; \frac{PV_2}{T_2} = \frac{0.564 \cdot P_0V_2}{T_2} \sim \nu_2.$$ **(3 балла)**.

Теперь,

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 \Rightarrow \frac{P_0V_1}{T_1} = \frac{0.564 \cdot P_0V_1}{T_1} + \frac{0.564 \cdot P_0V_2}{T_2}$$ **(2 балла)**.

Отсюда,

$$\frac{P_0V_1}{T_1} \cdot (1 - 0.564) = \frac{0.436 \cdot P_0V_1}{T_1} = \frac{0.564 \cdot P_0V_2}{T_2} \Rightarrow$$

$$T_1 = T_2 \cdot \frac{0.436}{0.564} \cdot \frac{V_1}{V_2} = (250.15\ \text{K}) \cdot 0.773 \cdot \frac{3}{2} = 290\ \text{K}.$$ **(4 балла)**.

С учётом возможности ошибок при подстановке значений, за получение правильного ответа – дополнительные **2 балла**.

Ответ: T_1 = 290 K.

Задание 2. Альтернативный вариант решения

1. При изотермическом соединении объёмов выполняется равенство

$$P_0 \cdot V_1 = P_2 \cdot (V_1 + V_2)$$ **(2 балла)**,

из которого следует, что

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{P_0}{P_2} - 1$$ **(2 балла)**.

Сразу отметим, что при подстановке $P_2 = 0.6 \cdot P_0$ получается

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{0.6} - 1 = \frac{2}{3} \approx 0.67 .$$

Пусть ν - суммарное количество молей газа в системе из двух объёмов. Сразу после их соединения, до изменения температуры T_2:

$$\frac{\nu_1 RT_1}{V_1} = \frac{\nu_2 RT_1}{V_2} = P_2$$ **(2 балла)**.

Отсюда следует, что

$$\nu_2 = \nu_1 \cdot \frac{V_2}{V_1} = \frac{2}{3}\nu_1$$ **(1 балл)**.

Действует соотношение

$$\nu_1 + \nu_2 = \nu$$ **(1 балл)**,

ведущее к результату

$$\begin{cases} \nu_1 = \dfrac{3}{5}\nu = 0.6 \cdot \nu, \\ \nu_2 = \dfrac{2}{5}\nu = 0.4 \cdot \nu. \end{cases}$$ **(2 балла)**.

После изменения температуры 2-го объёма, молекулы газа перераспределяются, при сохранении суммарного количества молей (***2 балла***). Если обозначить изменение количества частиц во 2-м объёме через $\Delta\nu$, то новому давлению P соответствуют равенства

$$\begin{cases} P\cdot V_2 = \left(\nu_2+\Delta\nu\right)\cdot RT_2, \\ P\cdot V_1 = \left(\nu_1-\Delta\nu\right)\cdot RT_1. \end{cases} \textbf{ (2 балла)}.$$

В объёме V_1 температура остаётся неизменной, что позволяет найти $\Delta\nu$:

$$P_2V_1 = 0.6\cdot P_0V_1 = \nu_1 RT_1 \Rightarrow RT_1 = \frac{0.6\cdot P_0V_1}{\nu_1} = \frac{P\cdot V_1}{\left(\nu_1-\Delta\nu\right)} = \frac{0.564\cdot P_0V_1}{\left(\nu_1-\Delta\nu\right)} \Rightarrow$$

(2 балла).

$$0.6\cdot\left(\nu_1-\Delta\nu\right) = 0.564\cdot\nu_1 \Rightarrow \Delta\nu = \frac{0.6-0.564}{0.6}\nu_1 = 0.06\cdot\nu_1 = 0.06\cdot 0.6\cdot\nu = 0.036\cdot\nu.$$

Далее,

$$\frac{P_2\cdot V_2}{\nu_2} = RT_1 \Rightarrow \frac{P_2\cdot V_2}{\nu_2}\frac{T_2}{T_1} = RT_2 \textbf{ (4 балла)}.$$

Теперь,

$$RT_2 = \frac{P_2V_2}{\nu_2}\cdot\frac{T_2}{T_1} = \frac{P\cdot V_2}{\nu_2+\Delta\nu} \Rightarrow \frac{0.6P_0}{0.4\cdot\nu}\cdot\frac{T_2}{T_1} = \frac{0.564P_0}{\left(0.4+0.036\right)\cdot\nu} \Rightarrow$$

(2 балла).

$$T_1 = T_2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{0.436}{0.564} = (250.15\ \text{K})\cdot 1.16 = 290\ \text{K}.$$

С учётом возможности ошибок при подстановке значений, за получение правильного ответа – дополнительные **2 балла**.

Ответ: T_1 = 290 K.

Примечание к распределению баллов при оценивании Задания 2. Можно предположить существование способов решения, заметно отличающихся от рассмотренных выше, либо являющихся их комбинациями. В таких случаях, предлагаю распределять баллы следующим образом:

- 4 балла за правильное получение отношения V_2 / V_1, в общем виде либо числом;
- 2 балла за использование уравнения Менделеева-Клайперона;
- 6 баллов за использование, прямое или косвенное, соотношения $\nu = \nu_1 + \nu_2 = \text{const}$, если рассмотрено изменение ν_1 и ν_2 в зависимости от температуры T_2;
- 6 баллов за получение, в любой форме, правильного выражения температуры T_1 через температуру T_2;
- 2 балла за правильный количественный ответ, с допустимой погрешностью ±1 в третьей значащей цифре.

Задание 3. (20 баллов) В тёплый летний день выпал крупный град. Известно, что сферические градины диаметром 2 см растаяли при постоянной температуре воздуха в течение 1 часа. Как долго продлится таяние, если собрать такие градины в шар диаметром 20 см? Считать, в качестве упрощающего приближения, что шар получился однородным, его плотность и теплофизические параметры совпадали с плотностью и параметрами маленьких градин.

Решение

Для решения задачи нужно установить либо догадаться, что время таяния ледяного шара пропорционально отношению его объёма (V) к площади (S), то есть диаметру, либо радиусу (**15 баллов** за формулирование этого утверждения, независимо от строгости доказательства). Это так, поскольку количество тепла, получаемое шаром в единицу времени из окружающей среды, пропорционально площади поверхности, тогда как суммарное количество тепла, необходимое для плавления льда, пропорционально его объёму. Возможны следующие количественные рассуждения, дающие указанный результат:

1. Если ледяной шар заданного радиуса R имеет начальную температуру, меньшую 0 °C, то он должен нагреться до 0 °C, прежде чем начнётся плавление. За время Δt шар получит через поверхность количество тепла ΔQ, которое даётся соотношением

$$\Delta Q = \alpha \cdot S \cdot \left(T_0 - T\right) \cdot \Delta t ,$$

где α - коэффициент теплоотдачи, S – площадь шара, T – его температура, T_0 – температура окружающей среды. Одновременно,

$$\Delta Q = C_\upsilon \cdot V \cdot \Delta T ,$$

где C_υ - теплоёмкость единицы объёма шара, V – объём, ΔT – изменение температуры. Учитывая, что

$$S = 4\pi R^2, V = \frac{4}{3}\pi R^3 ,$$

получаем скорость нагрева шара

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{\alpha}{C_\upsilon} \cdot \frac{S}{V} \cdot \left(T_0 - T\right) = \frac{3\alpha}{C_\upsilon R} \cdot \left(T_0 - T\right),$$

обратно пропорциональную его радиусу. Соответственно, время нагревания шара до любой заданной температуры будет пропорциональным радиусу R.

2. Если шар уже имеет температуру T = 0 °C, то его радиус будет постепенно уменьшаться по мере плавления. Для уменьшения радиуса на величину ΔR потребуется количество теплоты ΔQ:

$$\Delta Q = -\lambda_\upsilon \Delta V = -\lambda_\upsilon S \Delta R ,$$

где λ_υ - теплота плавления единицы объёма, а знак «–» учитывает тот факт, что при получении шаром тепла его радиус и объём уменьшаются. Если теперь Δt – время уменьшения радиуса на величину ΔR, то, аналогично пункту 1,

$$\frac{\lambda_\upsilon S \Delta R}{\Delta t} = -\alpha \cdot S \cdot (T_0 - 0\ °\mathrm{C}) \Rightarrow \Delta R = -\frac{\alpha}{\lambda_\upsilon} \cdot (T_0 - 0\ °\mathrm{C}) \cdot \Delta t .$$

Уменьшение радиуса пропорционально прошедшему времени, так что и время полного таяния шара будет пропорциональным его радиусу.

3. Если время плавления ледяного шара пропорционально диаметру, то время плавления шара диаметром 20 см будет в 10 раз большим, чем для шара диаметром 2 см (**3 балла,** при условии, что данный результат обоснован рассмотрением отношения объёма шара к площади, либо эквивалентным по строгости способом), то есть составит 10 часов (**2 балла**).

Ответ: 10 часов.

Примечание: Поток тепла через поверхность шара мог быть рассмотрен участниками олимпиады без получения того результата, что этот поток пропорционален площади поверхности (именно площади, а не радиусу либо объёму шара). Если при этом найдены и обоснованы соотношения малых приращений температуры, радиуса и времени, рассмотренные выше в пунктах 1 и 2 – **15 баллов** (+ 5 баллов за правильный окончательный результат).

Задание 4. (20 баллов) Космический путешественник спустился на поверхность сферического астероида. Он полагает, что прямо под ним, практически у самой поверхности, находится большая сферическая полость. Период колебаний маятника, принесенного путешественником, увеличился в 1.002 раза по сравнению с обратной стороной астероида, где влиянием полости можно было пренебречь. Каким должен быть радиус полости, если радиус астероида равен 250 км? Плотность астероида считать постоянной.

Решение

1. Период маятника вдали от полости (на обратной стороне астероида):

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_0}}$ **(4 балла)**

2. Ускорение свободного падения вдали от полости:

$g_0 = G\frac{M}{R^2} = G\cdot\frac{4}{3}\pi\rho R^3\cdot\frac{1}{R^2} = \frac{4}{3}\pi\rho G\cdot R$, где M – масса астероида, ρ - его плотность, R – радиус (**4 балла; для получения этих баллов, достаточно любым способом обосновать соотношение $g_0 \sim R$**).

3. Полость радиуса r можно представить как сферу отрицательной массы, наложенную поверх большого астероида. Тогда, её вклад в ускорение свободного падения окажется равным

$g_- = -G\frac{m}{r^2} = -G\cdot\frac{4}{3}\pi\rho r^3\cdot\frac{1}{r^2} = -\frac{4}{3}\pi\rho G\cdot r = -g_0\frac{r}{R}$ **(8 баллов)**

4. Теперь, отношение периодов маятника над полостью (T) и вдали от неё (T_0) запишется как

$\frac{T_0}{T} = \sqrt{\frac{g_0 - |g_-|}{g_0}} = \sqrt{\frac{g_0(1 - r/R)}{g_0}} = \sqrt{\frac{R-r}{R}}$ **(2 балла)**,

откуда

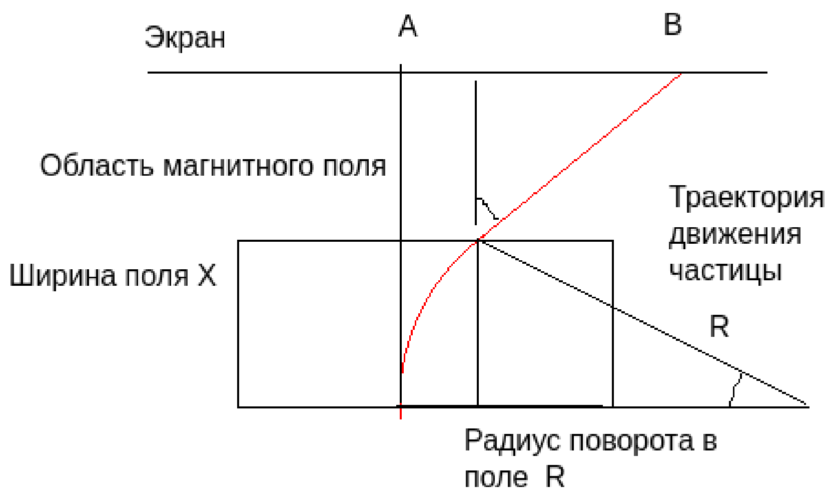
$r = R\cdot\left(1 - \left(\frac{T_0}{T}\right)^2\right) = 1.00$ км **(2 балла)**

Ответ: r = 1.00 км

Задание 5. (20 баллов) На пути узкого пучка моноэнергетических ионов углерода-12 с энергией **E**=120 эВ, имеющих заряд **q**=1,6*10^-19 Кл, расположена область однородного магнитного поля, имеющая размеры **x**=80 мм в первом эксперименте и 120 мм во втором. На расстоянии **l** = 1 м от края магнитного поля с индукцией **B**= 15 мТл установлена мишень, на которую выводится пучок. Найдите отношение смещения центра пучка ионов в первом эксперименте к смещению во втором.

Заметим, что отклонение пучка будет происходить, если ионы будут влетать в область однородного магнитного поля в плоскости, перпендикулярной линиям индукции магнитного поля.

Примерный чертеж:



AB — искомое смещение частицы от траектории прямолинейного движения. Отметим, что смещение будет состоять из двух компонент: смещения на выходе из магнитного поля **d** (где частица двигалась по дуге окружности) и смещения в области без поля **H**, где частица двигалась равномерно и прямолинейно.

Определим зависимость радиуса поворота в магнитном поле от данных в условии величин:

$$mv = \sqrt{2mE}\ R = \frac{mv}{qB} R = \frac{\sqrt{2mE}}{qB}$$

Смещение в поле **d** можно найти, рассмотрев прямоугольный треугольник с гипотенузой **R** и катетами **x**, **R-d,** откуда **d** находится по теореме Пифагора.

$$R^2 = x^2 + (R-d)^2 d = R - \sqrt{R^2 - x^2} \text{или } d = Rcos\left(arcsin\left(\frac{x}{R}\right)\right)$$

Для поиска смещения H самым простым способом необходимо определить угол ά. Заметим, что угол поворота в поле и угол, который образует вектор скорости при выходе из поля, одинаковы. Отсюда смещение в области без поля H может быть найдено следующим образом:

$$\alpha = arcsin(x/R) \to tan(\alpha) = H/L \to H = L * tan(\alpha)$$

Итоговое отклонение пучка может быть определено как сумма двух смещений: S = d + H

Выполнив расчет для двух случаев, получим итоговое отношение, равное

$$\frac{S_1}{S_2} = 0{,}63$$

Замечание: при подстановке численных значений выясниться, что углы невелики и в данном случае работает приближение малых углов. Однако использование такого приближения без обоснования расчетов недопустимо, поскольку оно не следует из условия задачи.

Критерии оценивания, максимальный балл за задание 20:
1) Правильный чертеж — 5 баллов
2) Указано, что углы поворота в магнитном поле и отклонения пучка на выходе совпадают — 2 балла
3) Приведена классическая формула радиуса поворота в магнитном поле $R = \frac{mv}{qB}$— 3 балла
4) В формуле радиуса поворота в магнитном поле сделана замена, $R = \frac{\sqrt{2mE}}{qB}$- 2 балла
5) Приведена формула для расчета смещения в области без магнитного поля — 3 балла
6) Выведена итоговая формула - 5 баллов, даже если в расчетах допущена ошибка. ИЛИ приведена итоговая формула и дан правильный ответ — 5 баллов.