9 класс

1. В магазине игрушек продаются 125 плюшевых мишек k разных цветов и шести разных размеров. При каком наибольшем k можно утверждать, что среди мишек найдутся хотя бы три одинаковых? (то есть совпадающих по цвету и по размеру) (20 баллов)

   Решение: Если $k = 10$, то всего в магазине 60 разновидностей мишек. Тогда если мишек каждого вида не более двух, то всего в магазине продаются не более 120 мишек – противоречие. Следовательно, среди мишек найдутся хотя бы три одинаковых.

   Если $k = 11$, то трёх одинаковых мишек может не найтись. Действительно, разновидностей мишек будет хотя бы 66, среди которых могут продаваться 59 видов по 2 экземпляра и ещё 7 видов – по одному экземпляру. При $k \geq 11$ разновидностей мишек будет больше, а значит в качестве контрпримера можно убирать вторые экземпляры мишек уже имеющихся видов и добавлять по одному новому экземпляру каждого добавленного вида.

   Ответ: 10

2. Найдите все решения ребуса $\text{И} \cdot \text{З} \cdot \text{У} \cdot \text{М} + \text{Р} \cdot \text{У} \cdot \text{Д} = 2022$ и докажите, что других нет. (В ребусе одинаковыми буквами заменены одинаковые цифры, разными – разные) (20 баллов)

   Решение: Перепишем равенство в виде $\text{У} \cdot (\text{И} \cdot \text{З} \cdot \text{М} + \text{Р} \cdot \text{Д}) = 2 \cdot 3 \cdot 337$. Так как У – цифра, являющаяся делителем числа 2022, то $\text{У} = 1, \text{У} = 2, \text{У} = 3$ или $\text{У} = 6$. Так как $\text{И} \cdot \text{З} \cdot \text{М} + \text{Р} \cdot \text{Д} < 9 \cdot 8 \cdot 7 + 9 \cdot 8 = 576 < 2 \cdot 337$, то $\text{У} > 3$, а значит $\text{У} = 6$. В таком случае $\text{И} \cdot \text{З} \cdot \text{М} + \text{Р} \cdot \text{Д} = 337$. Заметим, что $\text{Р} \cdot \text{Д} \leq 72$, значит $\text{И} \cdot \text{З} \cdot \text{М} \geq 265$. Предположим, что среди цифр $\text{И}, \text{З}, \text{М}$ нет девятки. Тогда среди этих цифр обязательно есть восьмёрка и семёрка, иначе $\text{И} \cdot \text{З} \cdot \text{М} \leq 8 \cdot 6 \cdot 5 = 240 < 265$. Если оставшаяся цифра не больше 4, то $\text{И} \cdot \text{З} \cdot \text{М} \leq 8 \cdot 7 \cdot 4 = 224$. Если оставшаяся цифра равна 5, то $\text{И} \cdot \text{З} \cdot \text{М} = 8 \cdot 7 \cdot 5 = 280$ и $\text{Р} \cdot \text{Д} = 57$, что невозможно. Если оставшаяся цифра равна 6, то $\text{И} \cdot \text{З} \cdot \text{М} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ и $\text{Р} \cdot \text{Д} = 1$, что невозможно.

   Предположим теперь, что среди цифр $\text{И}, \text{З}, \text{М}$ есть девятка. Тогда $\text{И} \cdot \text{З} \cdot \text{М} \,\vdots\, 9$, а $337 \equiv_9 4$, значит $\text{Р} \cdot \text{Д} \equiv_9 4$. Парами цифр, дающими в произведении число с остатком 4 при делении на 9, могут быть только $\{1,4\}, \{2,2\}, \{5,8\}, \{7,7\}$. Две пары сразу отметаются, так как $\text{Р} \neq \text{Д}$. Если $\text{Р} \cdot \text{Д} = 4$, то $\text{И} \cdot \text{З} \cdot \text{М} = 333 = 9 \cdot 37$, что невозможно. Если $\text{Р} \cdot \text{Д} = 40$, то $\text{И} \cdot \text{З} \cdot \text{М} = 297 = 9 \cdot 3 \cdot 11$, что также невозможно.

   Следовательно, ребус не имеет решений.

   Ответ: решений нет

3. Графики функций $y = x^2$ и $y = ax^2 + bx + c$ пересекаются в точках A и B, лежащих по разные стороны от оси ординат. Точка O – начало координат. Оказалось, что $\angle AOB = 90°$. Найдите все возможные значения c. (20 баллов)

Решение: Пусть $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ – координаты точек A и B соответственно, причём $x_1 \neq 0$ и $x_2 \neq 0$. Тогда x_1, x_2 являются корнями уравнения $(a-1)x^2 + bx + c = 0$. Если $a = 1$, то графики касаются в точке O, и двух точек пересечения быть не может. Иначе справедлива теорема Виета

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a-1}.$$

По теореме Пифагора $AB^2 = AO^2 + BO^2$, что в координатной форме примет вид

$$x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2,$$

что после раскрытия скобок и приведения подобных примет вид

$$x_1 x_2 = -y_1 y_2.$$

Точки A и B лежат на графике функции $y = x^2$, поэтому $y_1 = x_1^2$ и $y_2 = x_2^2$ и последнее равенство перепишется в виде

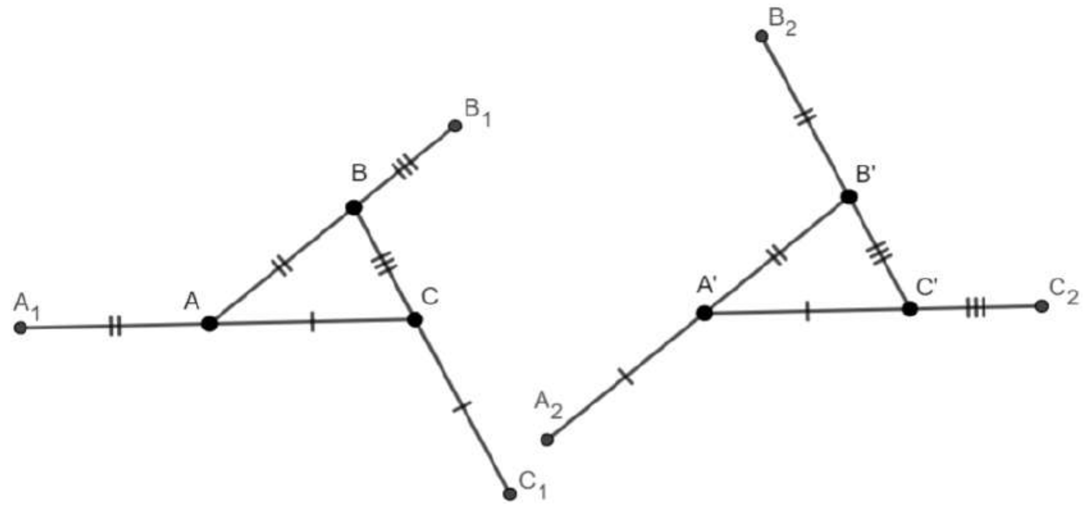
$$x_1 x_2 = -x_1^2 x_2^2,$$

откуда $x_1 x_2 = -1$. Подставляя в теорему Виета, получим, что $c = 1 - a$. Так как a может принимать любые значения, кроме 1, то c принимает любые значения, кроме нуля.

При любом указанном c, корни уравнения $(a-1)x^2 + bx + c = 0$ существуют, так как дискриминант квадратного уравнения равен $b^2 - 4(a-1)c = b^2 + 4c^2 > 0$. Равенство $x_1 x_2 = -1$ гарантирует, что эти корни будут разных знаков.

Ответ: $\boldsymbol{c \neq 0}$

4. На плоскости изображены два равных треугольника ABC и $A'B'C'$. На продолжениях сторон треугольника ABC взяли точки A_1, B_1, C_1, а на продолжениях сторон треугольника $A'B'C'$ – точки A_2, B_2, C_2, а затем отметили штрихами все одинаковые отрезки (см. рисунок). Докажите, что площади треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны. (20 баллов)



Решение: Докажем, что площади треугольников A_1CC_1 и $A_2B'B_2$ равны. По теореме синусов имеем

$$\frac{AB}{\sin\angle A_1CC_1} = \frac{AB}{\sin\angle BCA} = \frac{AC}{\sin\angle ABC} = \frac{A'C'}{\sin\angle A'B'C'} = \frac{A'C'}{\sin\angle A_2B'B_2},$$

откуда $AB \cdot \sin\angle A_2B'B_2 = A'C' \cdot \sin\angle A_1CC_1$, что равносильно $B_2B' \cdot \sin\angle A_2B'B_2 = CC_1 \cdot \sin\angle A_1CC_1$.

Тогда $S_{A_1CC_1} = \frac{1}{2} CA_1 \cdot CC_1 \cdot \sin\angle A_1CC_1 = \frac{1}{2} A_2B' \cdot B_2B' \cdot \sin\angle A_2B'B_2 = S_{A_2B'B_2}$.

Аналогично доказывается, что $S_{B_1AA_1} = S_{B_2C'C_2}$ и $S_{C_1BB_1} = S_{C_2A'A_2}$.

В итоге имеем

$$S_{A_1B_1C_1} = S_{A_1CC_1} + S_{B_1AA_1} + S_{C_1BB_1} + S_{ABC} = S_{A_2B'B_2} + S_{B_2C'C_2} + S_{C_2A'A_2} + S_{A'B'C'} = S_{A_2B_2C_2},$$

что и требовалось доказать.

5. В языке племени «Текимар» всего 7 букв: А, Е, И, К, М, Р, Т, однако не известно, каков их порядок в алфавите. *Словом* называется любая последовательность из семи различных букв алфавита, других слов в языке не существует. Глава племени выписал все существующие слова в алфавитном порядке и заметил, что слово «Метрика» в этом списке имеет номер 3634. Какой номер в этом списке имеет слово «Материк»? (20 баллов)

Решение: Всего слов в языке племени $7! = 5040$. Заметим, что количество слов, начинающихся с какой-то буквы, одинаковое для любой первой буквы, то есть оно равно $7! \div 7 = 6! = 720$. Если слово начинается с первой в алфавитном порядке буквы, то нумерация любого такого слова начинается с номера 1 и заканчивается номером $6!$, если со второй буквы в алфавите, то нумерация начинается с номера $6! + 1$ и заканчивается номером $2 \cdot 6!$, и так далее. В общем случае, если слово начинается с k-ой буквы в алфавите, то его нумерация варьируется от номера $(k-1) \cdot 6! + 1$ до номера $k \cdot 6!$. Число 3634 удовлетворяет неравенству $5 \cdot 6! < 3634 \le 6 \cdot 6!$, поэтому М является шестой буквой в алфавите. Теперь повторим аналогичный процесс для оставшихся шести букв. А именно, забудем про существование первой буквы, убрав её из слова. Тогда номер слова уменьшится на $5 \cdot 6! = 3600$. И если бы мы теперь составили все шестибуквенные слова и расставили бы их в алфавитном порядке, то слово «Етрика» имело бы номер 34. Количество слов, начинающихся с какой-то буквы, одинаковое для любой первой буквы, то есть оно равно $6! \div 6 = 5! = 120$. Если первая буква слова среди оставшихся шести букв является первой в алфавитном порядке, то нумерация любого такого слова начинается с номера 1 и заканчивается номером $5!$, если она является второй буквой в алфавитном порядке среди оставшихся, то нумерация начинается с номера $5! + 1$ и заканчивается номером $2 \cdot 5!$, и так далее. В общем случае, если первая буква слова является k-ой буквой в алфавитном порядке среди оставшихся, то его нумерация варьируется от номера $(k-1) \cdot 5!$ до номера $k \cdot 5!$. Число 34 удовлетворяет неравенству вышеуказанного представления следует, что $34 \le 5!$, поэтому Е является первой в алфавитном порядке буквой среди оставшихся, а значит первой буквой алфавита. Продолжая аналогичный процесс, получим порядок следования букв: Е – первая, А – вторая, Т – третья, Р – четвёртая, И – пятая, М – шестая, К – седьмая.

В слове «Материк» буквы стоят в следующем порядке: $6, 2, 3, 1, 4, 5, 7$, значит его номер равен $5 \cdot 6! + 1 \cdot 5! + 1 \cdot 4! + 0 \cdot 3! + 0 \cdot 2! + 0 \cdot 1! + 0 \cdot 0! + 1 = 3745$. (Множитель перед $k!$ указывает на количество цифр, стоящих правее и меньших цифры на $(k+1)$-ой позиции, если считать с конца слова. В конце добавляется единица, так как с неё начинается нумерация слов)

Ответ: 3745