# 11 класс

1. В вершинах правильного двенадцатиугольника в некотором порядке расставили натуральные числа от 1 до 12 (каждое по одному разу). Могло ли случиться так, что суммы всех пар соседних чисел являются простыми и суммы всех пар чисел, между которыми стоят ровно два числа, тоже являются простыми? (20 баллов)

   **Решение:** Каждое число в вершине участвует ровно в четырёх суммах. Заметим, что для получения простой суммы к числам 6 и 12 можно прибавить только $1, 5, 7$ и 11. Значит для вершин, в которых стоят числа 6 и 12, наборы соседних чисел и чисел, стоящих от них через две вершины, должны совпадать. Однако, для каждой вершины эти наборы различны, поэтому хотя бы одна из сумм не будет являться простым числом.

   **Ответ: не могло**

2. Сколькими способами в таблице $3 \times 3$ можно расставить числа от 1 до 9 (каждое по одному разу) так, чтобы в каждом столбце сверху-вниз и в каждой строке слева-направо числа шли в порядке возрастания? (20 баллов)

   **Решение:** Пронумеруем клетки таблицы так, как показано на рисунке. Ясно, что в левой верхней клетке стоит число 1, а в правой нижней – число 9.

| | | |
|---|---|---|
| $1$ | $a_2$ | $a_3$ |
| $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ |
| $a_7$ | $a_8$ | $9$ |

По условию $a_5 > a_2, a_5 > a_4, a_5 < a_6, a_5 < a_8$, поэтому $4 \leq a_5 \leq 6$. Рассмотрим случаи.

1) Если $a_5 = 4$, то числа $a_2$ и $a_4$ – это 2 и 3. Способов их расстановки всего 2. Теперь вычислим количество вариантов выбора чисел $a_3$ и $a_6$. На их место можно поставить любую из оставшихся пар чисел, причём $a_3 < a_6$, поэтому расстановка каждой пары определяется однозначно. Всего таких пар $C_4^2 = 6$. Оставшиеся два числа расставляются однозначно. Всего получилось $2 \cdot 6 = 12$ вариантов расстановки.

2) Если $a_5 = 6$, то числа $a_6$ и $a_8$ – это 7 и 8, и случай аналогичен предыдущему. Получаем ещё 12 вариантов расстановки.

3) Если $a_5 = 5$, то посмотрим, какие числа могут стоять в клетках с номерами $a_3$ и $a_7$. На их место нельзя ставить числа 2 и 8, так как эти числа обязаны быть соседями 1 и 9 соответственно. Если $a_3 = 3$, то $a_2 = 2$ и $a_4 = 4$. Любое из оставшихся чисел можно поставить в клетку $a_6$ тремя способами, оставшиеся числа ставятся однозначно. Рассмотренный вариант аналогичен случаям

$a_3 = 7, a_7 = 3$ и $a_7 = 7$ – в каждом получаем по 3 варианта расстановки, но были дважды посчитаны случаи, когда числа $a_3$ и $a_7$ – это 3 и 7. Всего таких случаев два:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 4 | 7 |
| 2 | 5 | 8 |
| 3 | 6 | 9 |

В итоге получаем $3 \cdot 4 - 2 = 10$ вариантов.

Если ни одно из чисел в клетках $a_3$ и $a_7$ не равно 3 или 7, то в клетках $a_3$ и $a_7$ могут стоять лишь числа 4 и 6 в любом порядке. Тогда в клетках $a_2$ и $a_4$ стоят числа 2 и 3 в любом порядке, а в клетках $a_6$ и $a_8$ – числа 7 и 8 в любом порядке. Всего 8 вариантов расстановок.

Все случаи разобраны, искомое число вариантов равно $24 + 10 + 8 = 42$.

**Ответ: 42**

3. Назовём число $x$ *полуцелым*, если число $2x$ – целое. *Полуцелой частью* числа $x$ назовём наибольшее полуцелое число, не превосходящее $x$, и будем обозначать $]x[$. Решите уравнение $x^2 + 2 \cdot ]x[ = 6$. (20 баллов)

**Решение:** Рассмотрим два случая.

1) Число $x$ – полуцелое, тогда $]x[ = x$ и исходное уравнение примет вид $x^2 + 2x - 6 = 0$. Корнями данного уравнения являются числа $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{7}$, но тогда числа $2x_{1,2}$ не являются целыми, значит решений нет.

2) Имеет место равенство $x = \frac{n}{2} + r$, где $n \in \mathbb{Z}$ и $0 < r < \frac{1}{2}$, тогда $]x[ = \frac{n}{2}$ и исходное уравнение примет вид $\left(\frac{n}{2} + r\right)^2 + n - 6 = 0$. Выразим из уравнения $r$ и получим

$$r = -\frac{n}{2} \pm \sqrt{6 - n}.$$

Решения существуют только при $n \leq 6$. Найдём все $n$, удовлетворяющие неравенству

$$0 < -\frac{n}{2} \pm \sqrt{6 - n} < \frac{1}{2},$$

которое равносильно неравенству

$$\frac{n}{2} < \pm\sqrt{6 - n} < \frac{n + 1}{2}.$$

Если $n \geq 0$, то $\frac{n+1}{2} > 0$ и может иметь решение только лишь неравенство

$$\frac{n}{2} < \sqrt{6 - n} < \frac{n + 1}{2},$$

которое после возведения в квадрат равносильно

$$n^2 < 4(6-n) < (n+1)^2,$$

$$\begin{cases} n^2 + 4n - 24 < 0 \\ n^2 + 6n - 23 > 0 \end{cases}.$$

Первое неравенство системы выполняется при $-2-2\sqrt{7} < n < -2+2\sqrt{7}$, а второе неравенство – при $n > -3+4\sqrt{2}$ или $n < -3-4\sqrt{2}$. Поскольку $2 < -3+4\sqrt{2} < 3$, $3 < -2+2\sqrt{7} < 4$, и $-3-4\sqrt{2} < -2-2\sqrt{7}$, то $n = 3$ – единственное целое значение, удовлетворяющее системе. В этом случае $x = \frac{n}{2} + r = \sqrt{6-n} = \sqrt{3}$.

Если $-1 < n < 0$, то решений нет, так как $n$ – целое.

Если $n \leq -1$, то $\frac{n+1}{2} \leq 0$ и может иметь решение только лишь неравенство

$$\frac{n}{2} < -\sqrt{6-n} < \frac{n+1}{2},$$

которое после возведения в квадрат равносильно

$$n^2 > 4(6-n) > (n+1)^2,$$

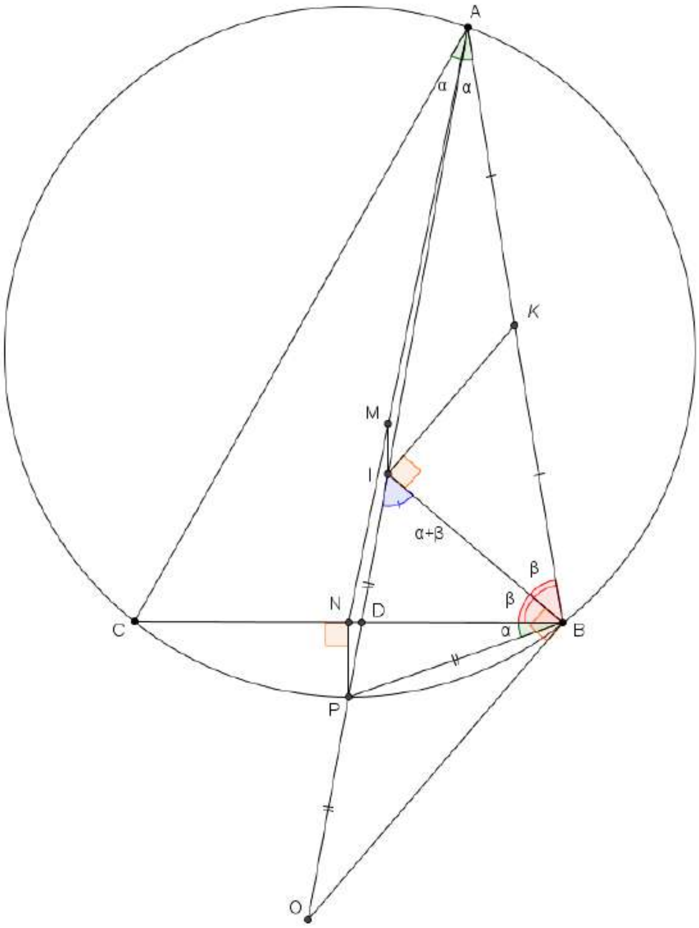
$$\begin{cases} n^2 + 4n - 24 > 0 \\ n^2 + 6n - 23 < 0 \end{cases}.$$

Второе неравенство системы выполняется при $-3-4\sqrt{2} < n < -3+4\sqrt{2}$, а первое неравенство – при $n > -2+2\sqrt{7}$ или $n < -2-2\sqrt{7}$. Поскольку $-9 < -3-4\sqrt{2} < -8$, $-8 < -2-2\sqrt{7} < -7$, и $-3+4\sqrt{2} < -2+2\sqrt{7}$, то $n = -8$ – единственное целое значение, удовлетворяющее системе. В этом случае $x = \frac{n}{2} + r = -\sqrt{6-n} = -\sqrt{14}$.

**Ответ:** $\boldsymbol{\sqrt{3}, -\sqrt{14}}$

4. В неравнобедренном треугольнике $ABC$ точка $K$ – середина стороны $AB$, $M$ – точка пересечения медиан, $I$ – центр вписанной окружности. Известно, что $\angle KIB = 90°$. Докажите, что $MI \perp BC$. (20 баллов)

**Решение:** Пусть прямая $AI$ пересекает описанную окружность треугольника $ABC$ в точке $P$. Из условия следует, что $AI$ и $BI$ – биссектрисы треугольника $ABC$. Пусть $\angle BAP = \angle CAP = \alpha$ и $\angle ABI =$




$\angle CBI = \beta$. Тогда $\angle CBP = \alpha$, как вписанный, и поэтому $\angle IBP = \alpha + \beta$. Заметим, что $\angle BIP = \angle BAP + \angle ABI = \alpha + \beta$, как внешний угол треугольника $AIB$. Это означает, что треугольник $BIP$ – равнобедренный и $PI = PB$. Пусть биссектриса внешнего угла треугольника при вершине $B$ пересекает прямую $AP$ в точке $O$. Тогда $BO \perp BI$, как биссектрисы смежных углов. Треугольник $BIO$ – прямоугольный, причём $\angle BIP = \angle IBP$, а значит $\angle POB = 90° - \angle BIP = 90° - \angle IBP = \angle PBO$ и $PB = PO$.

Так как $\angle OBI = \angle KIB = 90°$, то $IK \parallel OB$, а из того, что $AK = KB$ следует, что $IK$ – средняя линия треугольника $ABO$. Отсюда получаем, что $AI = IO$ и $AI = 2IP$. Пусть точка $N$ – середина стороны $BC$. Треугольники $AIM$ и $APN$ подобны, так как $AI{:}IP = AM{:}MN = 2{:}1$, а значит $MI \parallel PN$. Но $PN \perp BC$, поэтому $MI \perp BC$, что и требовалось доказать.

**Замечание:** Доказанный в задаче факт о том, что $PI = PB$ (и, соответственно, $PI = PC$), называется *леммой о трезубце*, а факт о том, что $PI = PO$, называется *леммой Мансиона*. Ссылки на леммы принимаются без доказательства.

5. Пусть $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ – множество всех простых чисел, расположенных в некотором порядке. Может ли случиться так, что для всех натуральных $i$ число $\frac{p_i p_{i+1} - p_{i+2}^2}{p_i + p_{i+1}}$ является натуральным? (20 баллов)

**Решение:** Докажем вспомогательную лемму.

**Лемма:** простых чисел вида $3k + 2$ бесконечно много.

**Доказательство:** предположим, что простых чисел вида $3k + 2$ конечное число. Обозначим все такие числа через $q_1, q_2, \dots, q_l$. Число $3q_1q_2 \dots q_l - 1$ не делится на простые числа $q_1, q_2, \dots, q_l$ и даёт остаток 2 при делении на 3. Значит среди его простых делителей должно быть число вида $3k + 2$ – противоречие. Лемма доказана.

Вернёмся к решению задачи. Предположим, что такое могло случиться. Тогда существует натуральное $m$ такое, что $p_m = 2$. Значит число $\frac{2p_{m+1}-p_{m+2}^2}{2+p_{m+1}} = 2 - \frac{p_{m+2}^2+4}{2+p_{m+1}} < 2$ является натуральным, откуда $\frac{p_{m+2}^2+4}{2+p_{m+1}} = 1$ и $p_{m+1} = p_{m+2}^2 + 2$. Случай $m > 1$ невозможен, так как тогда число $\frac{2p_{m-1}-p_{m+1}^2}{2+p_{m-1}} = 2 - \frac{p_{m+1}^2+4}{2+p_{m-1}} < 2$ также является натуральным, откуда $\frac{p_{m+1}^2+4}{2+p_{m-1}} = 1$ и $p_{m-1} = p_{m+1}^2 + 2 = (p_{m+2}^2 + 2)^2 + 2$.

Теперь если $p_{m+2} = 3$, то $p_{m-1} = 123$, что невозможно. Если же $p_{m+2} \neq 3$, то $p_{m+2}^2 \equiv_3 1$ и $p_{m+1} = p_{m+2}^2 + 2 \vdots 3$, а значит $p_{m+1} = 3, p_{m+2} = 1$, что невозможно. Следовательно, $m = 1$.

Предположим теперь, что нашлись числа $p_k$ и $p_{k+1}$ с различными ненулевыми остатками при делении на 3, то есть $p_k + p_{k+1} \vdots 3$. Поскольку число $\frac{p_kp_{k+1}-p_{k+2}^2}{p_k+p_{k+1}}$ является натуральным, то $p_kp_{k+1} - p_{k+2}^2 \vdots 3$. Но тогда $p_{k+2}^2 \equiv_3 p_kp_{k+1} \equiv_3 2$, что невозможно, так как квадраты имеют остатки 0 или 1 при делении на 3. В итоге мы доказали, что числа с остатками 1 и 2 при делении на 3 не могут быть соседними.

Поскольку $p_1 = 2$, это означает, что после $p_1$ стоят несколько чисел с остатком 2 при делении на 3, затем где-то стоит число 3. Если после тройки стоит число с остатком 2 при делении на 3, то все числа далее будут с таким же остатком и в последовательности простых чисел не будет ни одного числа с остатком 1 при делении на 3 (такие есть, например, число 7). Следовательно, после тройки стоит число с остатком 1 при делении на 3 и все числа за ним имеют такой же остаток. Но тогда до тройки стоит лишь конечное число простых чисел с остатком 2 при делении на 3, что противоречит доказанной лемме. Следовательно, так расставить числа нельзя.

**Ответ: не может**

**Замечание:** факт того, что простых чисел бесконечно много, принимается без доказательства.