10 класс

1. Существует ли трёхзначное число такое, что в его записи все цифры различны и расположены в порядке возрастания, в записи его квадрата все цифры различны и расположены в порядке возрастания, и в записи его куба все цифры различны и расположены в порядке возрастания? (20 баллов)

Решение: Предположим, что такое число существует. Тогда в десятичной записи его квадрата не меньше пяти цифр, а в записи его куба не меньше семи цифр. Это означает, что последняя цифра его квадрата не меньше 5, а последняя цифра его куба не меньше 7. Последней цифрой квадрата не может быть равна 5, так как тогда куб числа тоже оканчивается на 5, а также не может быть равна 7 и 8, так как таких квадратов не существует. Если последняя цифра квадрата равна 6, то трёхзначное оканчивается либо на 4 (тогда его куб оканчивается на 4), либо на 6 (тогда его куб оканчивается на 6) – оба варианта не подходят. Если последняя цифра квадрата равна 9, то трёхзначное оканчивается либо на 7 (тогда его куб оканчивается на 3, чего быть не может), либо на 3. Второе возможно только если трёхзначное число равно 123. Но $123^2 = 15129$, что не подходит под условие. Следовательно, такого числа не существует.

Ответ: не существует

2. Назовём натуральное число *почти палиндромом*, если в нём можно изменить одну цифру так, чтобы оно стало палиндромом. Сколько существует девятизначных почти палиндромов? (20 баллов)

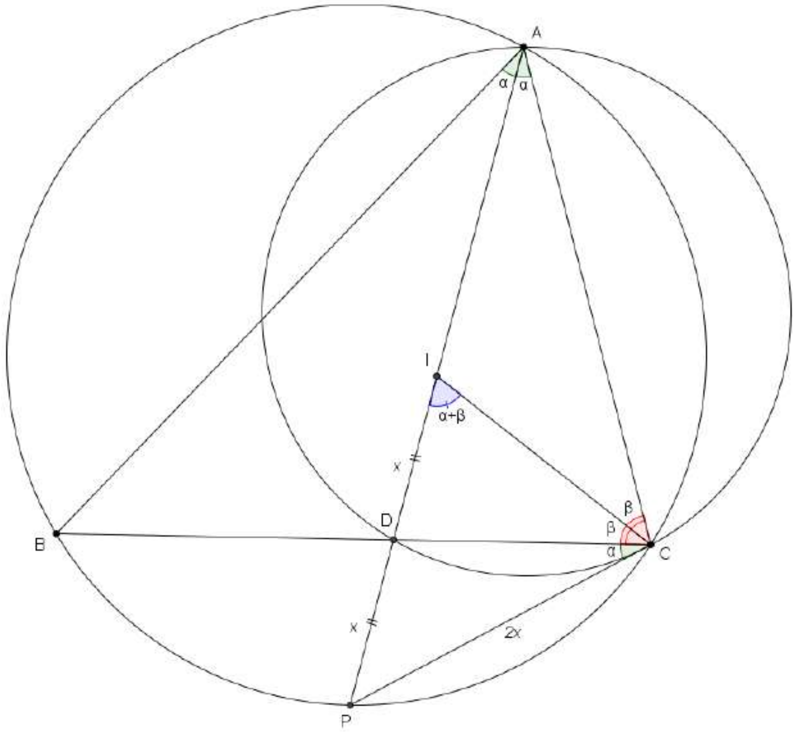
Решение: После замены одной цифры в почти палиндроме мы получим число вида $\overline{abcdedcba}$. Разобьём цифры на пары по разрядам: 1 и 9, 2 и 8, 3 и 7, 4 и 6. В любом почти палиндроме в трёх указанных парах разрядов цифры должны совпадать, и ровно в одной паре быть разными. Превратить это число в палиндром можно путём замены одной из двух цифр в оставшейся паре на другую цифру в этой паре. Выбрать три пары разрядов можно 4 способами (3 из них содержат пару 1 и 9, и ровно один способ эту пару не содержит), в каждой паре (за исключением 1 и 9) цифры могут быть любыми и одинаковыми, в паре 1 и 9 (если она выбрана) цифры одинаковые и не равны нулю, в оставшейся паре цифры различные (любые, если это не пара 1 и 9, и любые, кроме нуля на первом месте, если осталась пара 1 и 9), а средняя цифра произвольная. Всего таких чисел

$$3 \cdot 10^3 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 9 + 10^4 \cdot 9 \cdot 9 = 3240000.$$

Ответ: 3240000

3. В неравнобедренном треугольнике ABC биссектриса AD пересекает описанную окружность треугольника в точке P. Точка I – центр вписанной окружности треугольника ABC. Оказалось, что $ID = DP$. Найдите отношение $AI{:}\,ID$. (20 баллов)

Решение: Из условия следует, что AI и BI – биссектрисы треугольника ABC. Пусть $\angle BAP = \angle CAP = \alpha$ и $\angle ABI = \angle CBI = \beta$. Тогда $\angle CBP = \alpha$, как вписанный, и поэтому $\angle IBP = \alpha + \beta$. Заметим, что $\angle BIP = \angle BAP + \angle ABI = \alpha + \beta$, как внешний угол треугольника AIB. Это означает, что треугольник BIP – равнобедренный и $PI = PB$. Пусть $PD = DI = x$, тогда $PB = 2x$. Опишем около треугольника ADB окружность ω. Поскольку $\angle CBP = \angle PAB$, прямая PB является касательной к окружности ω, поэтому $PD \cdot PA = PB^2$. Отсюда $PA = 4x$, $AI = PA - PI = 2x$ и $AI : ID = 2 : 1$.



Ответ: 2:1

Замечание: Доказанный в задаче факт о том, что $PI = PB$ (и, соответственно, $PI = PC$), называется *леммой о трезубце*. Ссылка на лемму принимается без доказательства.

4. Назовём различные натуральные числа m и n *родственными*, если сумма наименьшего натурального делителя числа m, отличного от 1, и наибольшего натурального делителя числа m, отличного от m, равна n, а сумма наименьшего натурального делителя числа n, отличного от 1, и наибольшего натурального делителя числа n, отличного от n, равна m. Найдите все пары родственных чисел. (20 баллов)

Решение: Будем обозначать через $S(x)$ и $L(x)$ соответственно наименьший натуральный делитель числа x, отличный от 1, и наибольший натуральный делитель числа x, отличный от x. Ясно, что $x \neq 1$, ведь в этом случае $S(x)$ и $L(x)$ не существуют. Любая родственная пара m и n является решением системы

$$\begin{cases} S(m) + L(m) = n \\ S(n) + L(n) = m \end{cases}.$$

Без ограничения общности будем считать, что $n > m$. Заметим, что если число x простое, то $S(x) = x, L(x) = 1$. Это означает, что числа m и n не могут быть одновременно простыми. Действительно, ведь тогда $n = m + 1$ и $m = n + 1$, что невозможно.

Если число m является простым, то $S(m) = m, L(m) = 1$ и тогда $n = m + 1$. Как было доказано, число n не может быть простым, тогда n составное и $L(n) \neq 1, S(n) \neq n$. Если $L(n) < \frac{n}{2}$, то $L(n) \leq \frac{n}{3}$

и $S(n) \le \frac{n}{3}$. Но тогда $m = n - 1 = S(n) + L(n) \le \frac{2n}{3}$, откуда $n \le 3$, что невозможно. Значит $L(n) = \frac{n}{2}$ и $S(n) = 2$, откуда $m = n - 1 = S(n) + L(n) = 2 + \frac{n}{2}$. Решением этого уравнения является $n = 6$, и тогда $m = 5$. Число n не может быть простым, так как тогда $m > n$.

Ответ: 5 и **6**

5. Положительные числа a, b, c таковы, что $a + b + c = 1$. Найдите максимальное значение выражения $\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{abc+1}$. (20 баллов)

Решение: Если $a = b = c = \frac{1}{3}$, то $\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{abc+1} = \frac{16}{7}$. Докажем, что $\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{abc+1} \le \frac{16}{7}$. Преобразуем выражение к виду $\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{abc+1} = \frac{abc+ab+bc+ac+a+b+c+1}{abc+1} = 1 + \frac{ab+bc+ac+1}{abc+1}$. Докажем, что $\frac{ab+bc+ac+1}{abc+1} \le \frac{9}{7}$. Сделаем замену $c = 1 - a - b$ и будем доказывать неравенство

$$7(ab + (a + b)(1 - a - b) + 1) \le 9(ab(1 - a - b) + 1),$$

которое после раскрытия скобок и приведения подобных примет вид

$$9a^2b + 9ab^2 - 16ab - 7a^2 - 7b^2 + 7a + 7b - 2 \le 0.$$

Поскольку $a + b < 1$, то хотя бы одна из переменных меньше, чем $\frac{7}{9}$ – пусть это будет b. Перепишем неравенство в виде

$$(9b - 7)a^2 + (9b^2 - 16b + 7)a - 7b^2 + 7b - 2 \le 0.$$

Поскольку $9b - 7 < 0$, для выполнения полученного неравенства при любых $0 < a < 1$ достаточно доказать, что левая часть не имеет решений относительно a, то есть что дискриминант квадратного уравнения

$$(9b - 7)a^2 + (9b^2 - 16b + 7)a - 7b^2 + 7b - 2 = 0$$

неположителен.

$$D = (9b^2 - 16b + 7)^2 + 4(9b - 7)(7b^2 - 7b + 2) = (9b - 7)^2(b - 1)^2 + 4(9b - 7)(7b^2 - 7b + 2)$$
$$= (9b - 7)(9b^3 + 3b^2 - 5b + 1) = (9b - 7)(b + 1)(3b - 1)^2 \le 0,$$

что и требовалось доказать.

Ответ: $\mathbf{\frac{16}{7}}$