

Олимпиада школьников «Шаг в будущее»

Отборочный этап

10 класс

1. Найдите наибольшее значение выражения $x+y$, где x, y – решения в целых числах уравнения $3x^2 + 5y^2 = 345$
2. Автомобиль проехал половину пути со скоростью 60 км/ч, затем одну треть оставшегося пути со скоростью 120 км/ч и оставшееся расстояние со скоростью 80 км/ч.

Найдите среднюю скорость автомобиля в этом рейсе. Ответ дайте в км/ч.

3.

Найдите радиус окружности, касающейся меньшей стороны и продолжений двух других сторон прямоугольного треугольника, если две его меньшие стороны равны 13 и 84 соответственно.

4.

На координатной прямой отмечено 16 точек, которые пронумерованы слева направо. Координата любой точки, кроме крайних, равна полусумме координат двух соседних точек. Найдите координату пятой точки, если первая точка имеет координату 2, а шестнадцатая – координату 47.

5.

В сосуд вместимостью 6 л налито 4 л 70%-ного (по объёму) раствора серной кислоты, во второй сосуд той же вместимости налито 3 л 90% -ного раствора серной кислоты. Из второго сосуда в первый переливают некоторое количество раствора так, что в нём получается r -% -ный раствор серной кислоты. Найдите наибольшее целое значение r , при котором задача имеет решение.

6.

Найдите корни уравнения $f(x) = 8$, если $4f(3-x) - f(x) = 3x^2 - 4x - 3$ для любого действительного значения x . В ответе укажите произведение найденных корней.

7.

В треугольнике ABC проведена биссектриса AL ($L \in BC$), M и N точки на двух других биссектрисах (или на их продолжениях) такие, что $MA=ML$ и $NA=NL$, $\angle BAC=50^\circ$.

Найти величину $\angle MAN$ в градусах.

8. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множеством

решений неравенства $\frac{x^2 + (a+1)x + a}{x^2 + 5x + 4} \geq 0$ является объединение трёх

непересекающихся интервалов. В ответе укажите сумму трёх наименьших целых значений a из полученного интервала.

9.

Вычислив число 8^{2021} , подсчитали сумму цифр в этом числе и записали полученный результат. Затем в новом записанном числе подсчитали сумму цифр и снова записали результат. Эти действия повторяли до тех пор, пока не получили однозначное число. Найти это число.