Компьютерное моделирование и графика;

тур по математике и инженерной графике

9-й класс

Вариант №1

№1. Количество студентов юношей в университете на 35% больше, чем студентов девушек. Все обучающиеся распределены по двум корпусам, причём в первом корпусе учатся $\frac{2}{5}$ всех юношей, а во втором - $\frac{4}{7}$ всех девушек. Сколько всего обучающихся в университете, если известно, что в первом корпусе учится меньше 2500, а во втором больше 2500 человек?

Решение:

Пусть в университете учится n девушек, тогда число юношей $1{,}35n = \frac{27}{20}n$, отсюда можно сделать вывод, что число n кратно 20, то есть $n = 20m$.

Значит, число девушек $20m$, а юношей $27m$.

В первом корпусе учится $\frac{2}{5}$ всех юношей, то есть $\frac{2}{5} \cdot 27m = \frac{54}{5}m$ студентов, во втором корпусе учится $\frac{4}{7}$ всех девушек, то есть $\frac{4}{7} \cdot 20m = \frac{80}{7}m$ студенток. Для выполнения условия целочисленности необходимо, чтобы число m было кратно 35, то есть $m = 35k$.

Тогда в первом корпусе $\frac{2}{5} \cdot 27m = \frac{54}{5}m = \frac{54}{5} \cdot 35k = 378k$ студентов, $\frac{3}{7} \cdot 20m = \frac{60}{7}m = \frac{60}{7} \cdot 35k = 300k$ студенток и всего $678k$ человек,

а во втором корпусе $\frac{3}{5} \cdot 27m = \frac{81}{5}m = \frac{81}{5} \cdot 35k = 567k$ студентов, $\frac{4}{7} \cdot 20m = \frac{80}{7}m = \frac{80}{7} \cdot 35k = 400k$ студенток и всего $967k$ человек.

По условию задачи $\begin{cases} 678k < 2500 \\ 967k > 2500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < 3\dfrac{466}{678} \\ k > 2\dfrac{566}{967} \end{cases}$, следовательно, $k = 3$, а общее число обучающихся равно $678k + 967k = 1645k = 4935$.

Ответ: 4935.

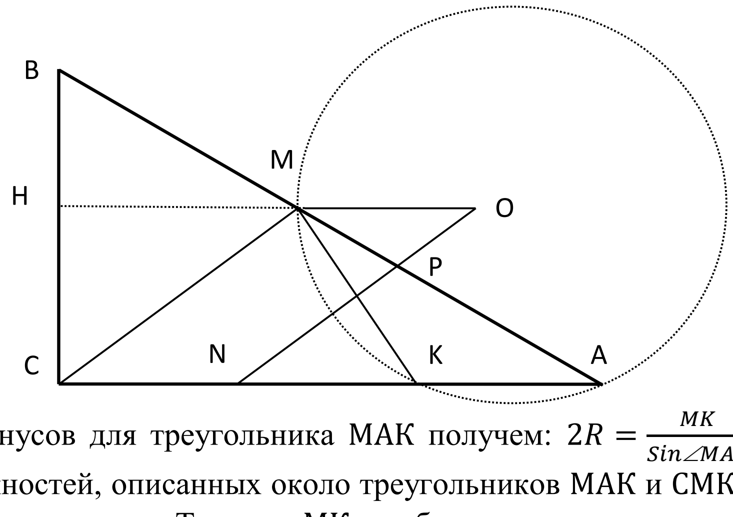
Критерии

Баллы	Критерии выставления баллов
10	Полное решение. Обоснованно получен правильный ответ
5	Верно составлена модель задачи и имеются некоторые продвижения в решении
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных критериев

№2. В треугольнике АВС угол С – прямой. Прямая МК перпендикулярна медиане СМ и пересекает АС в точке К. Известно, что $\text{СК}:\text{КА} = 5:3$. Точка О – центр окружности, описанной около треугольника МАК. Найдите площадь треугольника ОВС, если $\text{ВС} = 4$.

Решение.

По свойству медианы прямоугольного треунгольника $\text{СМ} = \text{ВМ} = \text{АМ} = x$. Пусть $\text{СК} = k$, $\text{КА} = n$. Треугольники АВС и СКМ – прямоугольные и подобны по острому углу $\angle MAC = \angle MCA$ (MCA – равнобедренный). Поэтому, $x: k = (k+n): 2x$ или $x = \sqrt{\frac{k(k+n)}{2}}$.



По теореме синусов для треугольника МАК получем: $2R = \frac{MK}{Sin\angle MAC} = \frac{MK}{sin\angle MCA} = CK$, т.е. радиусы окружностей, описанных около треугольников МАК и СМК с ценрами в точках О и N соответствено равны. Так как МК – общая хорда равных окружностей, то NO – серединный перпендикуляр к ней и $NO = \sqrt{4R^2 - MK^2} = \sqrt{k^2 - CK^2 + CM^2} = CM$.

По условию задачи $\text{СМ} \perp \text{МК} \Rightarrow \text{СМ} \parallel \text{О}N \Rightarrow CMON$ – параллелограмм, т.е.

$\text{ОМ} = \text{С}N = k/2$, $\text{С}N \parallel \text{О}M \Rightarrow \text{ОМ} \perp BC$. Поэтому, ОН – высота треугольника ОВС и

$\mathrm{OH} = \mathrm{OM} + \mathrm{MH} = \mathrm{OM} + \frac{AC}{2} = R + \frac{k+n}{2} = \frac{k}{2} + \frac{k+n}{2} = k + \frac{n}{2}.$

По условию $k: n = 5: 3 \Rightarrow \mathrm{OH} = 1{,}3k$. Из исходного треугольника, по Теореме Пифагора ($\mathrm{BC} = 4, \mathrm{AC} = 1{,}6k, AB = 2x = 4k\sqrt{0{,}2}$): $16 + 2{,}26k^2 = 3{,}2k^2 \Rightarrow k^2 = 25 \Rightarrow k = 5$.

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1{,}3 \cdot 5 = 13.$$

Ответ: 13.

Критерии

Баллы	Критерии выставления баллов
10	Полное решение. Обоснованно получен правильный ответ
5	Доказано, что CMON – параллелограмм,
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных критериев

№3. При каких значениях параметра a существует хотя бы одна пара чисел $(x;y)$, удовлетворяющая равенству $x^2 + 2y^2 + 3a^2 + xy + 2ax + 3ay - 10 = 0$?

Решение:

Перепишем уравнение как квадратное относительно x:

$x^2 + (2a + y)x + 2y^2 + 3a^2 + 3ay - 10 = 0$,

$D = (2a + y)^2 - 4 \cdot (2y^2 + 3a^2 + 3ay - 10) = -7y^2 - 8a^2 - 8ay + 40$,

Уравнение имеет решения, если $D \ge 0,$ то есть $-7y^2 - 8a^2 - 8ay + 40 \ge 0$

или $7y^2 + 8ay + 8a^2 - 40 \le 0 \ (*)$.

Пусть $f(y) = 7y^2 + 8ay + 8a^2 - 40$ - это квадратичная функция, графиком является парабола, ветви которой направлены вверх.

Неравенство $(*)$ имеет решения, если значение функции $f(y)$ в вершине параболы неположительно, то есть

$f(y_в) = 7{y_в}^2 + 8ay_в + 8a^2 - 40 \le 0$, $y_в = -\dfrac{4a}{7}$

$f(y_в) = \dfrac{40}{7}a^2 - 40 \le 0$, что верно при $a^2 \le 7$ или $a \in \left[-\sqrt{7}; \sqrt{7}\right]$.

Ответ: $a \in \left[-\sqrt{7}; \sqrt{7}\right]$.

Критерии

Баллы	Критерии выставления
10	Обоснованно получен правильный ответ
5	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

№4(б). По чертежам и данным задачи 4а, определите длину отрезка АЕ.

Решение задачи 4б (КМиГ, деталь №3).

1) Пусть E_1 - проекция точки Е на плоскость АВС. По условию задачи 4а (см. файл деталь3) расстояние между плоскостями АВС и DEF равно 20. Следовательно, $EE_1 = 20$.
2) По чертежу на первой странице, расстояние от точки E_1 до прямой АВ равно 20, а от проекции точки E_1 на прямую АВ до точки А равно 10.
3) Таким образом, по теореме Пифагора, расстояние от точки E_1 до точки А равно $AE_1 = \sqrt{10^2 + 20^2} = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}$.
4) По теореме Пифагора для треугольника AE_1E,

   $AE = \sqrt{AE_1{}^2 + EE_1{}^2} = \sqrt{500 + 20^2} = \sqrt{900} = 30$.

   Ответ: 30.

Критерии

Баллы	Критерии выставления баллов
10	Полное решение. Обоснованно получен правильный ответ
5	Верно найдено AE_1 или дважды правильно применена теорема Пифагора, но допущена арифметическая ошибка
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных критериев

Задача 4а.

Даны две проекции треугольника ABC и горизонтальная проекция треугольника DEF. Плоскость треугольника DEF параллельна плоскости треугольника ABC и выше ее на на 20 мм.

Требуется:

1) построить фронтальную и горизонтальную проекции двух пирамид ABCE и DEFA с соблюдением проекционной связи;

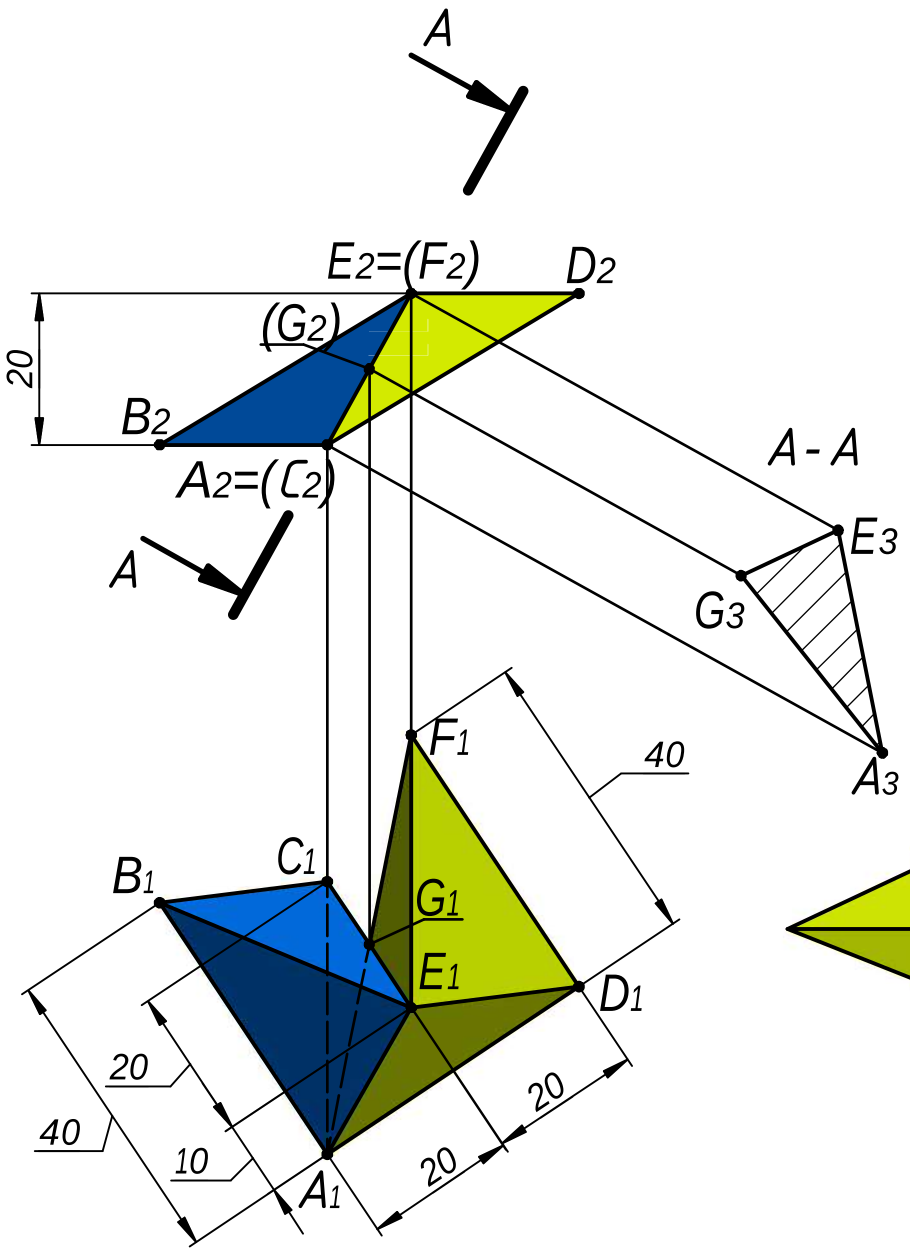
2) построить проекции фигуры, общей для обеих пирамид;

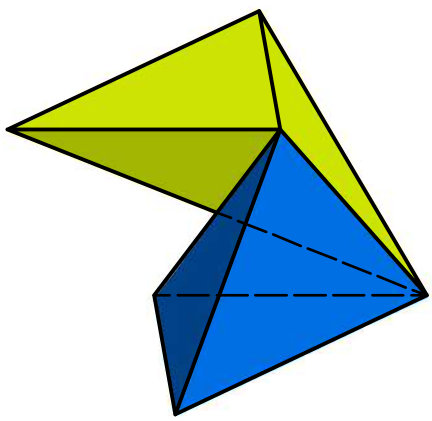
3) определить натуральную величину искомой фигуры с помощью графических построений;

4) обозначить видимость ребер пирамид;

5) оформить все изображения по ГОСТ 2.303-306;

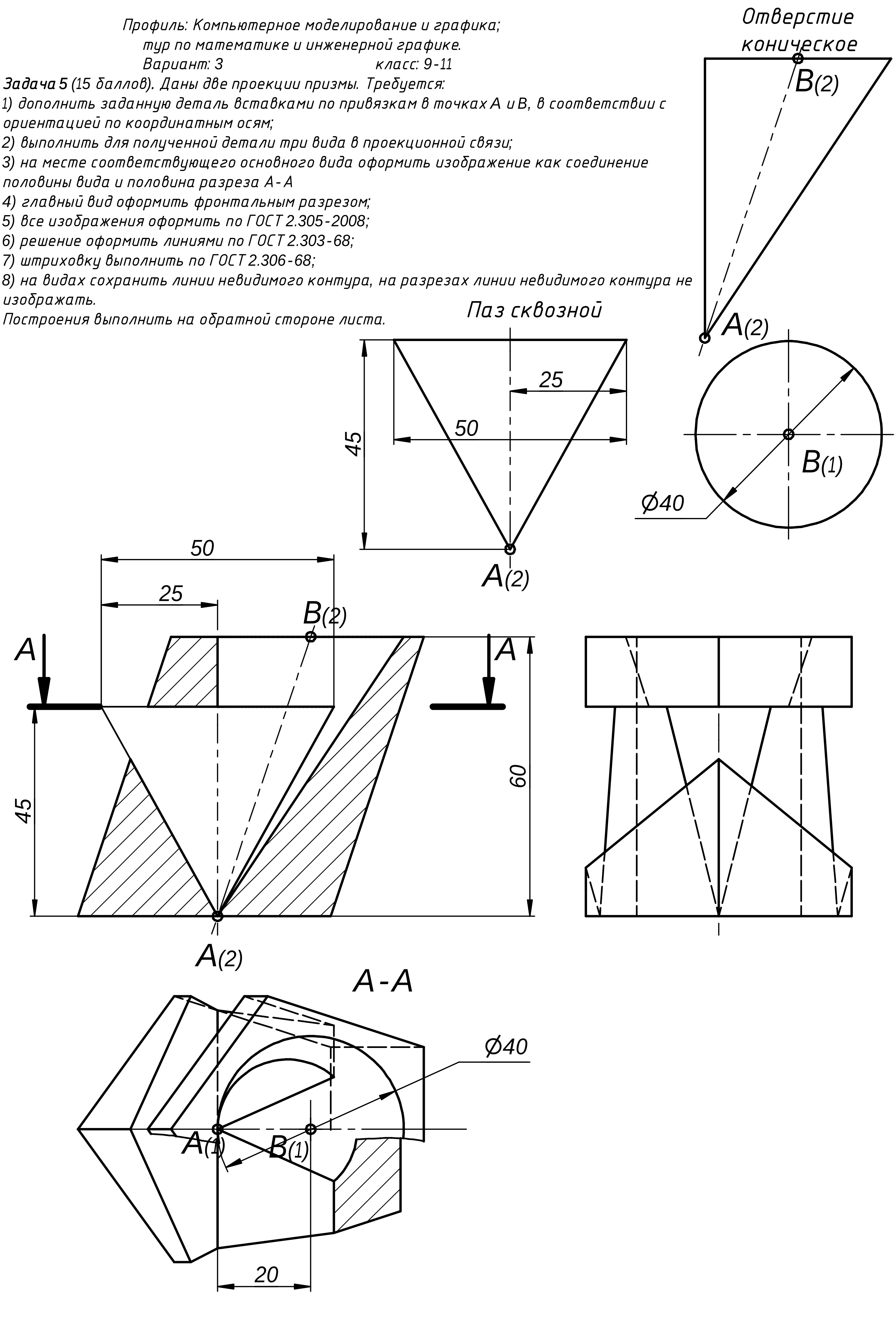
6) обозначить и сохранить на чертеже линии построения натуральной величины фигуры, общей для обеих пирамид.





Профиль: Компьютерное моделирование и графика;
тур по математике и инженерной графике.
Вариант: 3 класс: 9-11

Задача 5 *(15 баллов). Даны две проекции призмы. Требуется:*
1) дополнить заданную деталь вставками по привязкам в точках A и B, в соответствии с ориентацией по координатным осям;
2) выполнить для полученной детали три вида в проекционной связи;
3) на месте соответствующего основного вида оформить изображение как соединение половины вида и половина разреза А-А
4) главный вид оформить фронтальным разрезом;
5) все изображения оформить по ГОСТ 2.305-2008;
6) решение оформить линиями по ГОСТ 2.303-68;
7) штриховку выполнить по ГОСТ 2.306-68;
8) на видах сохранить линии невидимого контура, на разрезах линии невидимого контура не изображать.
Построения выполнить на обратной стороне листа.



Компьютерное моделирование и графика;

тур по математике и инженерной графике

9-й класс

Вариант №3

№1. Число девятиклассников, пишущих олимпиаду по математике, на 45% больше числа восьмиклассников. Школьников распределили по двум корпусам: в первом корпусе оказалось меньше 1000 человек, во втором – больше 1000. Сколько школьников писали олимпиаду во втором корпусе, если в нем оказались $\frac{1}{3}$ девятиклассников и $\frac{6}{7}$ восьмиклассников?

Решение: Пусть число восьмиклассников n, тогда девятиклассников $n\left(1+\frac{45}{100}\right)=\frac{29}{20}n$.

Число школьников в первом корпусе $\frac{2}{3}\cdot\frac{29}{20}\cdot n+\frac{1}{7}\cdot n=\frac{233}{210}n<1000$,

число школьников во втором корпусе $\frac{1}{3}\cdot\frac{29}{20}\cdot n+\frac{6}{7}\cdot n=\frac{563}{420}n>1000$,

следовательно, число n кратно 420.

Получаем, что $746<n<902$, а учитывая кратность 420, $n=840$.

Число школьников во втором корпусе $\frac{563}{420}\cdot 840=1126$.

Ответ: 1126.

Критерии

Баллы	Критерии выставления баллов
10	Полное решение. Обоснованно получен правильный ответ
5	Верно составлена модель задачи и имеются некоторые продвижения в решении
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных критериев

№2. (10 баллов). В треугольнике ABC проведены три биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1. Точки N, K, M середины сторон AB, BC и AC, соответственно. Прямые, проходящие через точку N параллельно BB_1 и через точку M параллельно CC_1 пересекаются в точке N_1. Прямые, проходящие через точку N параллельно AA_1 и через точку K параллельно CC_1 пересекаются в точке K_1.

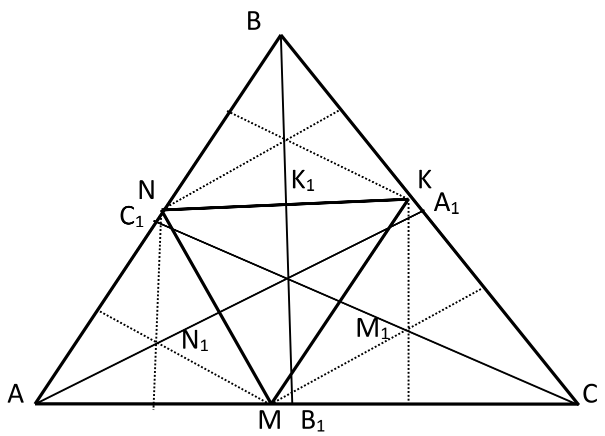
Прямые, проходящие через точку М параллельно AA_1 и через точку K параллельно BB_1 пересекаются в точке M_1. Найдите площадь шестиугольника $NN_1MM_1KK_1$, если площадь треугольника ABC равна 144 см^2.

Ответ: 72 см^2.

Решение.

Очевидно, что треугольники BNK, ANM, MKN и KMC – равные (свойство медиан). Следовательно, $S_{MKN} = 0{,}25 \cdot S_{ABC}$, BK_1, NK_1 и KK_1, биссектрисы треугольника BNK, аналогично AN_1, MN_1 и NN_1, биссектрисы треугольника ANM, а CM_1, KM_1 и MM_1, биссектрисы треугольника KMC. Поэтому $S_{MM_1K} = S_{NK_1B}$, $S_{MN_1N} = S_{KK_1B}$, то есть оставшиеся часть площади искомого шестиугольника равна площади треугольника BNK, но $S_{BKN} = 0{,}25 \cdot S_{ABC}$, следовательно, $S_{NN_1MM_1KK_1} = 0{,}5 \cdot S_{ABC} = 72$ см^2.

Ответ: 72 см^2.



Критерии

Баллы	Критерии выставления баллов
10	Полное решение. Обоснованно получен правильный ответ
5	Найдено, что BK_1, NK_1 и KK_1, биссектрисы треугольника BNK или подобное этому.
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных критериев

№3. Найти все тройки чисел $(a;b;c)$ при которых уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет единственный корень $x = -2$, причём $a + b + c = 5$.

Решение: Рассмотрим случай, когда уравнение является квадратным, то есть $a \neq 0$. Число -2 является решением уравнения, если выполняется равенство

$4a-2b+c=0$, квадратное уравнение имеет единственное решение, если дискриминант уравнения равен нулю. Получаем систему $\begin{cases} a+b+c=5 \\ 4a-2b+c=0 \\ b^2-4ac=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} b=a+\dfrac{5}{3} \\ c=\dfrac{10}{3}-2a \\ \left(a+\dfrac{5}{3}\right)^2-4a\left(\dfrac{10}{3}-2a\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{20}{9} \\ c=\dfrac{20}{9} \\ a=\dfrac{5}{9} \end{cases}.$$

Рассмотрим случай, когда уравнение является линейным, то есть $a=0$. Число -2 является решением уравнения, если выполняется равенство $-2b+c=0$.

Получаем систему $\begin{cases} a=0 \\ -2b+c=0 \\ a+b+c=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ c=2b=\dfrac{10}{3} \\ b=\dfrac{5}{3} \end{cases}.$

Ответ: $\left(0;\dfrac{5}{3};\dfrac{10}{3}\right)$, $\left(\dfrac{5}{9};\dfrac{20}{9};\dfrac{20}{9}\right)$.

Критерии

Баллы	Критерии выставления
10	Обоснованно получен правильный ответ
5	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

№4(б) (10 баллов). Пусть точка M – середина отрезка DF. По данным задачи 4(а) и чертежам к этой задаче, найдите расстояние от точки M до отрезка EF.

Решение.

1) Исходя из данных чертежа $DF=40$; $EE_0=40$. Тогда площадь треугольника DEF $S_{DEF}=\frac{1}{2}EE_0\cdot DF=\frac{1}{2}\cdot 40\cdot 40=800$ $мм^2$.

2) Исходя из данных чертежа, $FE_0=FD-E_0D=40-10=30$ *мм*, тогда по теореме Пифагора $EF=\sqrt{EE_0{}^2+E_0F^2}=\sqrt{40^2+30^2}=50$ *мм*.

3) $S_{DEF}=\frac{1}{2}EF\cdot DD_0=\frac{1}{2}\cdot 50\cdot DD_0=800 \Rightarrow DD_0=\frac{800}{25}=32$ *мм*.

4) ΔMM_0F подобен $\Delta DD_0F \Rightarrow \frac{MM_0}{DD_0}=\frac{MF}{DF}=\frac{1}{2} \Rightarrow$

$MM_0=\frac{1}{2}DF=\frac{1}{2}\cdot 32=16$ *мм*.

Ответ: 16 *мм*.

№4.

Баллы	Критерии выставления баллов
10	Полное решение. Обоснованно получен правильный ответ
5	Обоснованно получен промежуточный результат (расстояние от точки D до прямой EF, либо синус угла EFD, либо другой важный результат
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных критериев

Задача 4а.

Даны две проекции треугольника ABC и горизонтальная проекция треугольника DEF. Плоскость треугольника DEF параллельна плоскости треугольника ABC и выше ее на на 40 мм.

Требуется:

1) построить фронтальную и горизонтальную проекции двух пирамид ABCD и DEFA с соблюдением проекционной связи;

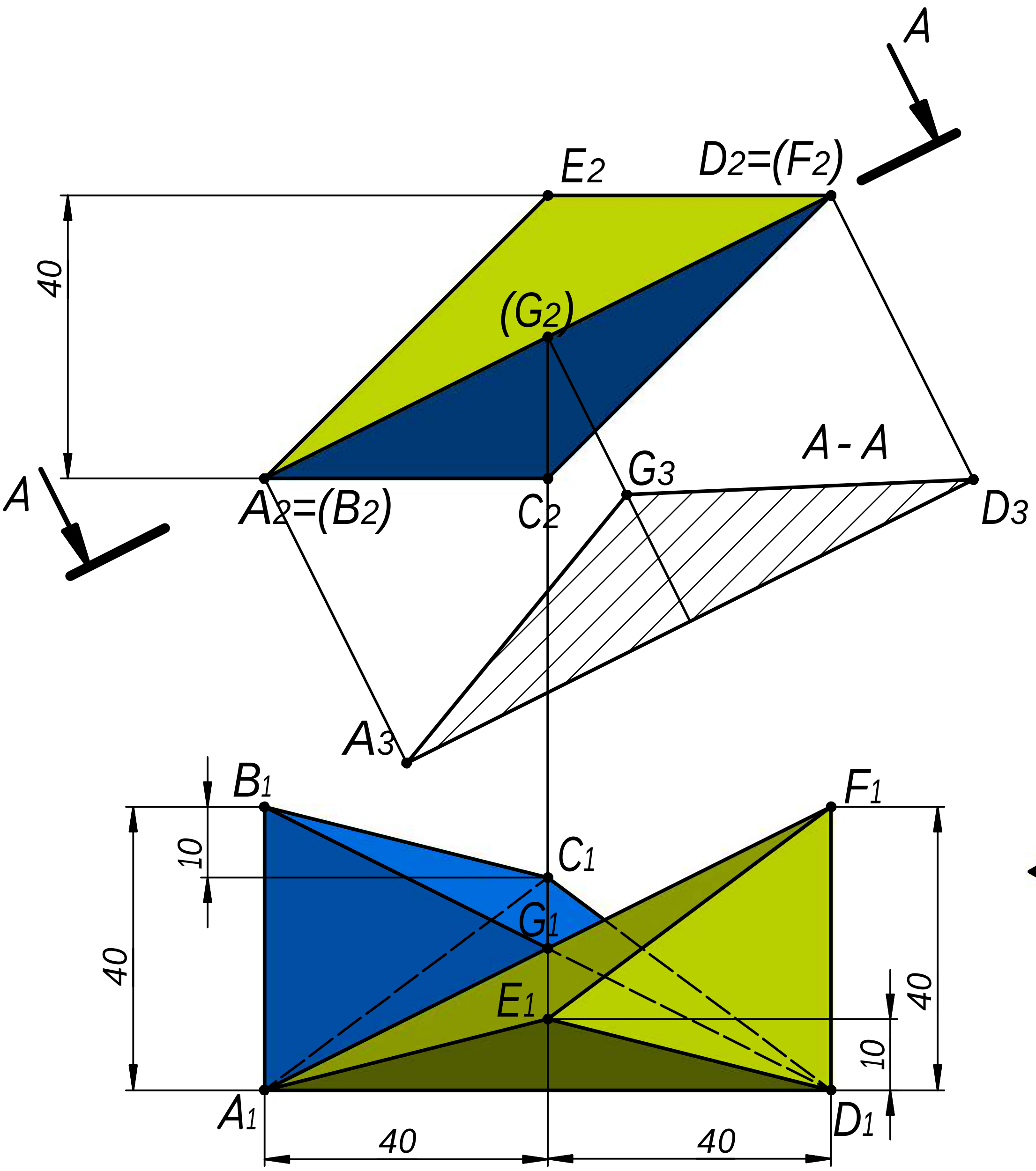
2) построить проекции фигуры, общей для обеих пирамид;

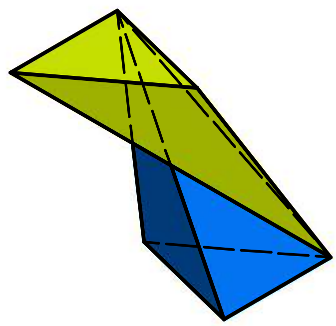
3) определить натуральную величину искомой фигуры с помощью графических построений;

4) обозначить видимость ребер пирамид;

5) оформить все изображения по ГОСТ 2.303-306;

6) обозначить и сохранить на чертеже линии построения натуральной величины фигуры, общей для обеих пирамид .

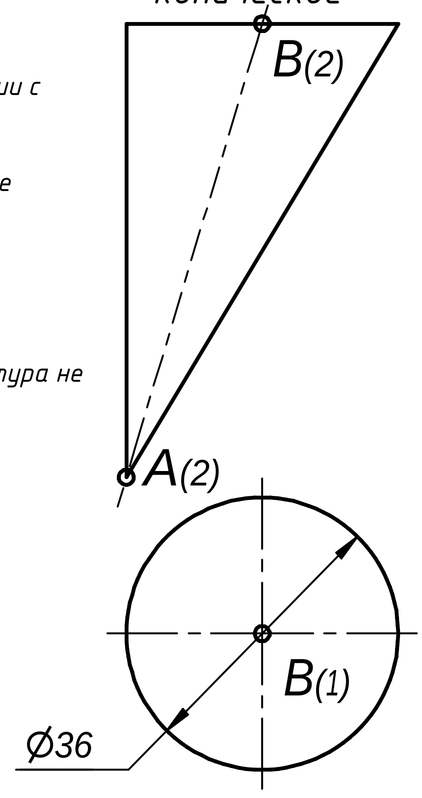




Профиль: Компьютерное моделирование и графика;
тур по математике и инженерной графике.
Вариант: 1 *класс: 7-11*

***Задача 5** (15 баллов). Даны две проекции призмы. Требуется:*
1) дополнить заданную деталь вставками по привязкам в точках A и B, в соответствии с ориентацией по координатным осям;
2) выполнить для полученной детали три вида в проекционной связи;
3) на месте соответствующего основного вида оформить изображение как соединение половины вида и половина разреза A-A
4) главный вид оформить фронтальным разрезом;
5) все изображения оформить по ГОСТ 2.305-2008;
6) решение оформить линиями по ГОСТ 2.303-68;
7) штриховку выполнить по ГОСТ 2.306-68;
8) на видах сохранить линии невидимого контура, на разрезах линии невидимого контура не изображать.
Все построения выполнить на обратной стороне листа.

Отверстие коническое



Паз сквозной