

Олимпиада школьников "Шаг в будущее"

Профиль: КМиГ.

Вариант: 1

Класс: 8

Задача 1 (15 баллов). Решите уравнение

$$\frac{|x+2|-|x-8|}{|x-5|-|x-1|} = \frac{|x-5|+|x-1|}{-|x+2|}$$

Решение.

Домножим числители и знаменатели обеих частей уравнения на сопряженные выражения. $|x+2|+|x-8|>0, \forall x; |x-5|+|x-1|>0, \forall x;$

$$\frac{(x+2)^2 - (x-8)^2}{(x-5)^2 - (x-1)^2} = \frac{(|x-5|+|x-1|)(|x+2|+|x+8|)}{-|x+2|(|x+5|+|x-1|)};$$

$$-\frac{5}{2} = \frac{(|x+2|+|x+8|)}{-|x+2|}; x \neq 3;$$

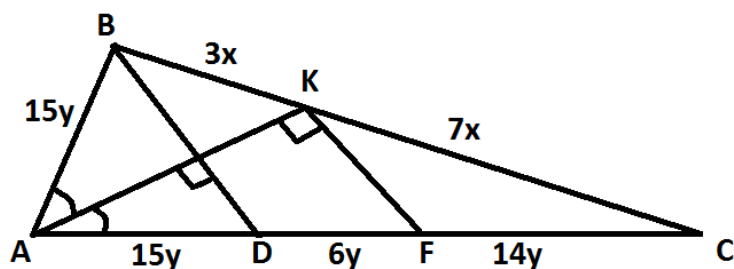
$$3|x+2|=2|x-8|; \begin{cases} 3x+6=2x-16 \\ 3x+6=-2x+16 \end{cases}; x = -22; x = 2.$$

Ответ: -22;2.

Баллы	Критерии оценивания
15	Полное обоснованное решение
10	Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей или выполнено домножение на сопряженное выражение
5	Рассмотрены не все случаи, допущены вычислительные ошибки

Задача 2 (15 баллов). В треугольнике ABC биссектриса AK делит сторону BC в отношении 3:7, считая от точки B . Из точек B и K проведены параллельные прямые BD и KF , пересекающие сторону AC в точках D и F соответственно, так, что $AD:CF = 15:14$. Найдите величину угла AKF .

Решение.



Пусть $AD = 15y$, тогда $CF = 14y$, $DF = 6y$.

$$AK - \text{биссектриса} \Rightarrow AB : AC = 3 : 7 \Rightarrow AB = \frac{3}{7} \cdot 35y = 15y \Rightarrow \triangle ABD$$

равнобедренный $\Rightarrow$ биссектриса $\triangle ABD$ является его высотой
 $\Rightarrow AK \perp BD \Rightarrow AK \perp KF \Rightarrow \angle AKF = 90^\circ$.

Ответ: 90° .

Баллы	Критерии оценивания
15	Решение верно.
10	Решение верно, но недостаточно обоснованно или допущена одна ошибка.
5	Найдено одно из промежуточных утверждений.
0	Решение не верно или отсутствует.

Задача 3 (20 баллов). Три садовых товарищества прокладывают общую дорогу длиной 12 км, деля расходы поровну. Садовое товарищество «Сирень» внесло свою долю деньгами, уплатив 10 млн.руб. Товарищество «Искра» проложило 7 км дороги, а оставшиеся 5 км - товарищество «Москвич». Как внесенные 10 млн руб. должны быть распределены между двумя другими товариществами?

Решение.

Каждое товарищество должно проложить 4 км дороги и эта доля стоит 10 млн. руб. Значит, 1 км дороги стоит 2,5 млн. руб. «Искра» потратила $7 \cdot 2,5 = 17,5$ млн., т.е. переплатила 7,5 млн. Товарищество «Москвич» потратило $5 \cdot 2,5 = 12,5$ млн. руб., переплата составила 2.5 млн.

Ответ: 7,5 млн. руб. «Искре»; 2,5 млн. руб. «Москвичу».

Баллы	Критерии оценивания
20	Полное обоснованное решение.
15	Решение с недостатками обоснования.
10	Решение с вычислительной ошибкой.
5	Найдена стоимость 1 км.

№4(б). По чертежам и данным задачи 4а, определите длину отрезка АЕ.

Решение задачи 4б (КМиГ, деталь №3).

- 1) Пусть E_1 - проекция точки Е на плоскость АВС. По условию задачи 4а (см. файл деталь3) расстояние между плоскостями АВС и DEF равно 20. Следовательно, $EE_1 = 20$.
- 2) По чертежу на первой странице, расстояние от точки E_1 до прямой АВ равно 20, а от проекции точки E_1 на прямую АВ до точки А равно 10.
- 3) Таким образом, по теореме Пифагора, расстояние от точки E_1 до точки А равно $AE_1 = \sqrt{10^2 + 20^2} = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}$.
- 4) По теореме Пифагора для треугольника AE_1E ,

$$AE = \sqrt{AE_1^2 + EE_1^2} = \sqrt{500 + 20^2} = \sqrt{900} = 30.$$

Ответ: 30.

Критерии

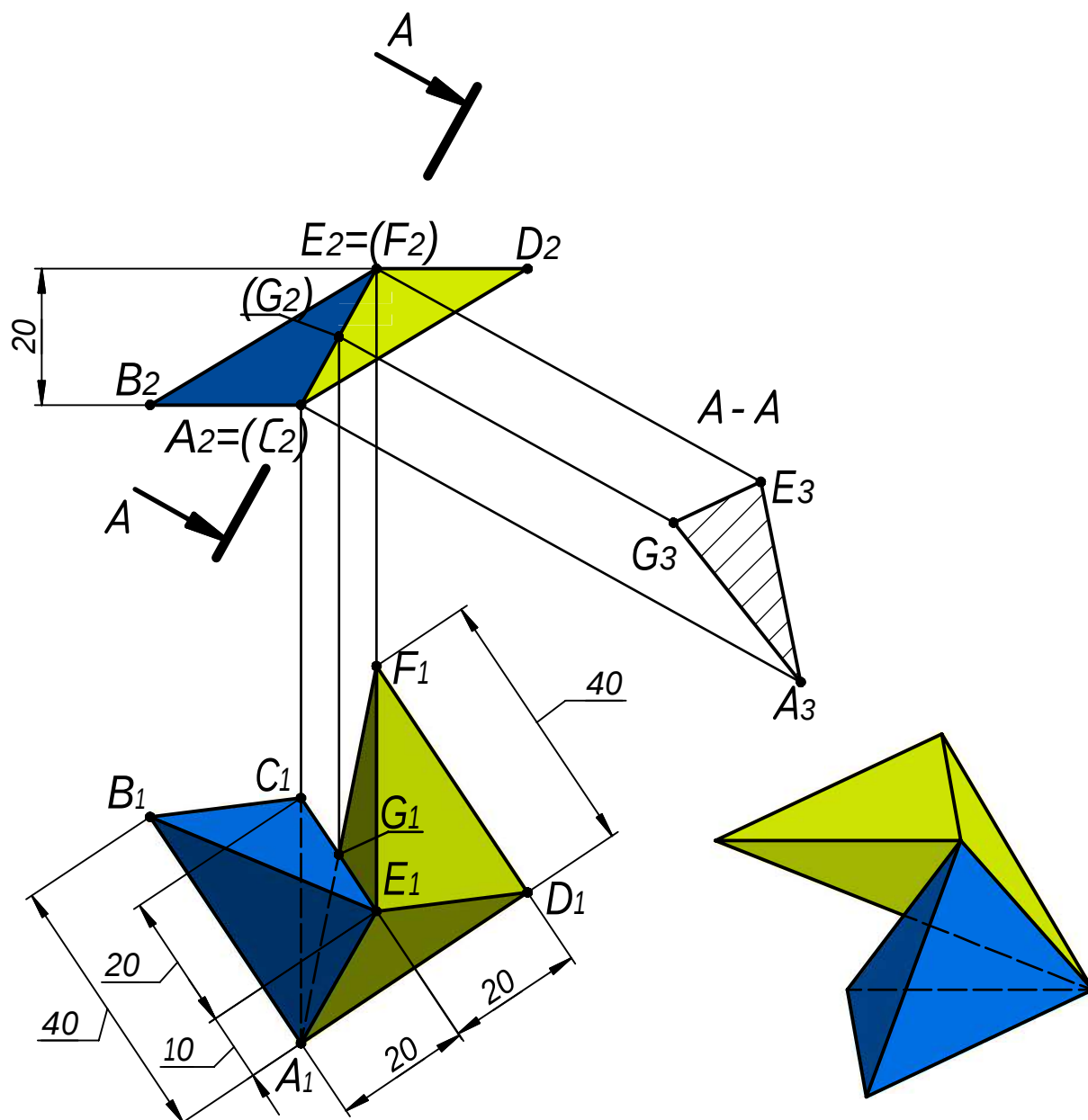
Баллы	Критерии выставления баллов
10	Полное решение. Обоснованно получен правильный ответ
5	Верно найдено AE_1 или дважды правильно применена теорема Пифагора, но допущена арифметическая ошибка
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных критериев

Задача 4а.

Даны две проекции треугольника ABC и горизонтальная проекция треугольника DEF. Плоскость треугольника DEF параллельна плоскости треугольника ABC и выше ее на 20 мм.

Требуется:

- 1) построить фронтальную и горизонтальную проекции двух пирамид ABCE и DEFA с соблюдением проекционной связи;
- 2) построить проекции фигуры, общей для обеих пирамид;
- 3) определить натуральную величину искомой фигуры с помощью графических построений;
- 4) обозначить видимость ребер пирамид;
- 5) оформить все изображения по ГОСТ 2.303-306;
- 6) обозначить и сохранить на чертеже линии построения натуральной величины фигуры, общей для обеих пирамид.



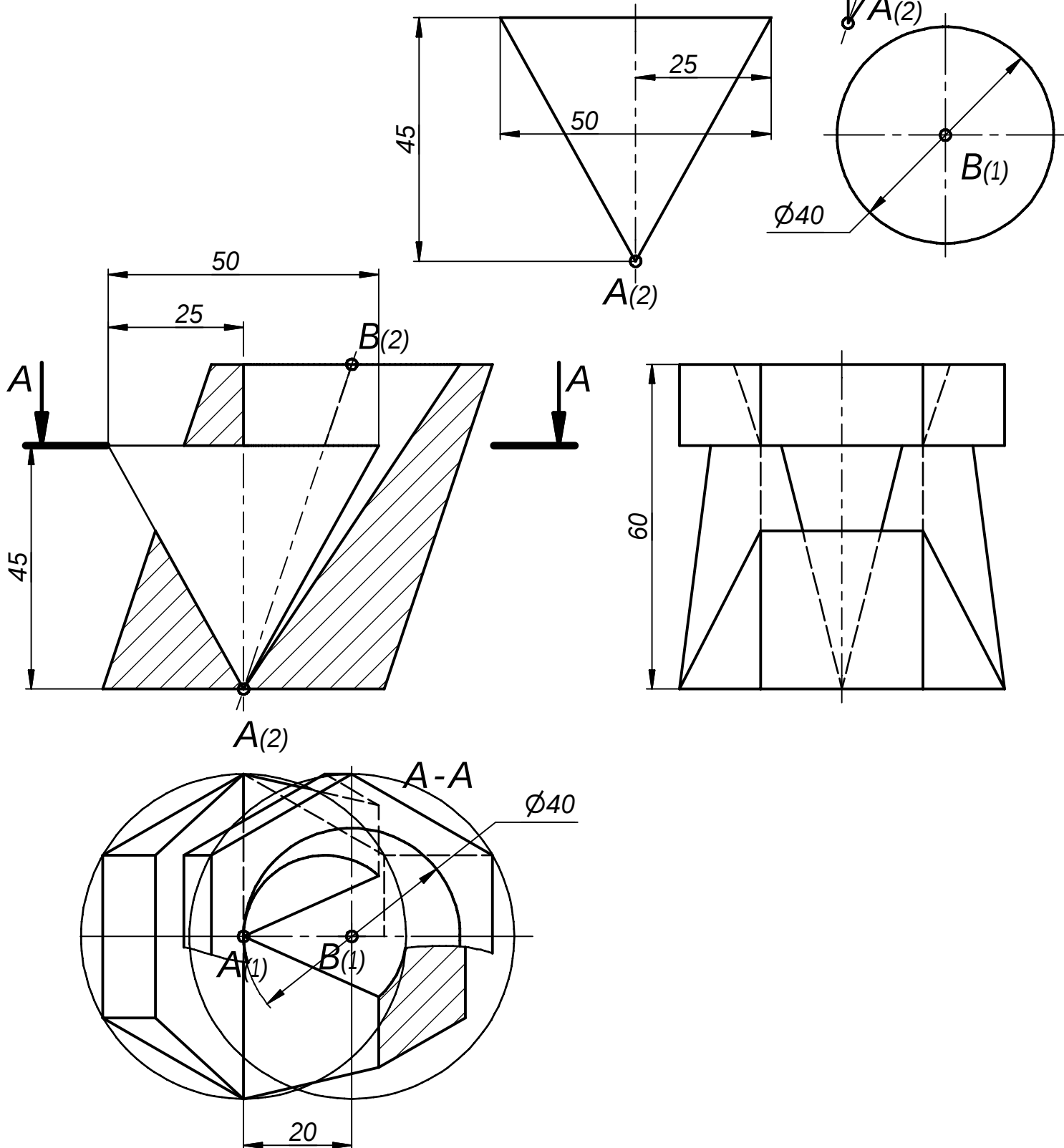
Задача 5 (15 баллов). Даны две проекции призмы. Требуется:

- 1) дополнить заданную деталь вставками по привязкам в точках А и В, в соответствии с ориентацией по координатным осям;
- 2) выполнить для полученной детали три вида в проекционной связи;
- 3) на месте соответствующего основного вида оформить изображение как соединение половины вида и половина разреза А-А
- 4) главный вид оформить фронтальным разрезом;
- 5) все изображения оформить по ГОСТ 2.305-2008;
- 6) решение оформить линиями по ГОСТ 2.303-68;
- 7) штриховку выполнить по ГОСТ 2.306-68;
- 8) на видах сохранить линии невидимого контура, на разрезах линии невидимого контура не изображать.

Построения выполнить на обратной стороне листа.

Паз сквозной

Отверстие
коническое



Задача 1 (15 баллов). Решите систему уравнений
$$\begin{cases} |5y+3|+|2x+1|=\frac{21}{x+7} \\ |5y+3|+|2x-1|=\frac{21}{x+7} \end{cases}$$

Решение.

Вычтем из первого уравнения второе. $|x+1|-|2x-1|=0; \begin{cases} 2x+1=2x-1 \\ 2x+1=1-2x \end{cases}; x=0;$

Подставим в любое уравнение системы.

$|5y+3|=2; 5y+3=\pm 2; y=-1; y=-\frac{1}{5};$ Получим пары $(0; -1); (0; -\frac{1}{5})$

Ответ: $(0; -1); (0; -\frac{1}{5})$

Баллы	Критерии оценивания
15	Полное обоснованное решение.
10	Верное решение с вычислительной ошибкой.
5	Найдена одна пара решений.

Задача 2 (15 баллов). В квадрате $ABCD$ $AB=1$, точки E и K середины сторон CD и AD соответственно. BE пересекает CK в точке O , а AD в точке F . AO пересекает BC в точке P . Найдите площадь треугольника POF .

Решение.

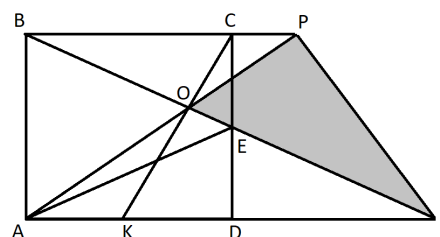
$$\triangle BCE = \triangle CKD \Rightarrow BE \perp CK$$

CO - высота $\triangle BCE$.

$$BC:CE = 2:1 \Rightarrow BO:OE = 4:1$$

Четырехугольник $ABPF$ - трапеция

$$\Rightarrow S_{\triangle POF} = S_{\triangle BOA} = \frac{4}{5} \cdot S_{\triangle BEA} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD} = \frac{2}{5} = 0,4$$



Ответ: 0,4.

Баллы	Критерии оценивания
15	Решение верно.
10	Решение верно, но недостаточно обоснованно или допущена одна ошибка.
5	Доказано одно из промежуточных утверждений (например $S_{\triangle BOA} = S_{\triangle POF}$ или $CK \perp BE \dots$)
0	Решение не верно или отсутствует

Задача 3 (20 баллов). Стадо овец пасут два пастуха и собаки. Один пастух идет впереди, другой позади стада. Стадо растянулось на 400 метров. Пастух, идущий впереди, отправляет с помощью собаки записку своему коллеге. Собака передала записку и вернулась назад, а стадо за это время прошло 300м. Какое расстояние пробежала собака?

Решение.

Пусть x -скорость стада в м/мин, y - скорость собаки. $\frac{400}{y+x}$ -время движения собаки в конец стада;

$$\frac{400}{y-x} \text{ -время движения в начало стада. } \left(\frac{400}{y-x} + \frac{400}{y+x} \right) \cdot x = 300;$$

Поделим на x числитель и знаменатель дробей. Обозначим $\frac{y}{x} = k$.

$$4(k+1) + 4(k-1) = 3(k^2 - 1); 8k = 3k^2 - 3; \frac{D}{4} = 25; k = 3 = \frac{y}{x};$$

Собака пробежит в 3 раза большее расстояние, чем стадо за то же время.

$$300 \cdot 3 = 900 \text{ м}$$

Ответ: 900м.

Баллы	Критерии оценивания
20	Полное обоснованное решение.
15	При верном ходе решения допущена вычислительная ошибка.
10	Верно составлено уравнение.
5	Верные рассуждения о времени движения собаки.

№4(б) (10 баллов). Пусть точка М – середина отрезка DF. По данным задачи 4(а) и чертежам к этой задаче, найдите расстояние от точки М до отрезка EF.

Решение.

- 1) Исходя из данных чертежа $DF = 40$; $EE_0 = 40$. Тогда площадь треугольника DEF $S_{DEF} = \frac{1}{2}EE_0 \cdot DF = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 40 = 800 \text{ мм}^2$.
- 2) Исходя из данных чертежа, $FE_0 = FD - E_0D = 40 - 10 = 30 \text{ мм}$, тогда по теореме Пифагора $EF = \sqrt{EE_0^2 + E_0F^2} = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50 \text{ мм}$.
- 3) $S_{DEF} = \frac{1}{2}EF \cdot DD_0 = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot DD_0 = 800 \Rightarrow DD_0 = \frac{800}{25} = 32 \text{ мм}$.
- 4) $\triangle MM_0F$ подобен $\triangle DD_0F \Rightarrow \frac{MM_0}{DD_0} = \frac{MF}{DF} = \frac{1}{2} \Rightarrow MM_0 = \frac{1}{2}DF = \frac{1}{2} \cdot 32 = 16 \text{ мм}$.

мм.

Ответ: 16 мм.

Критерии

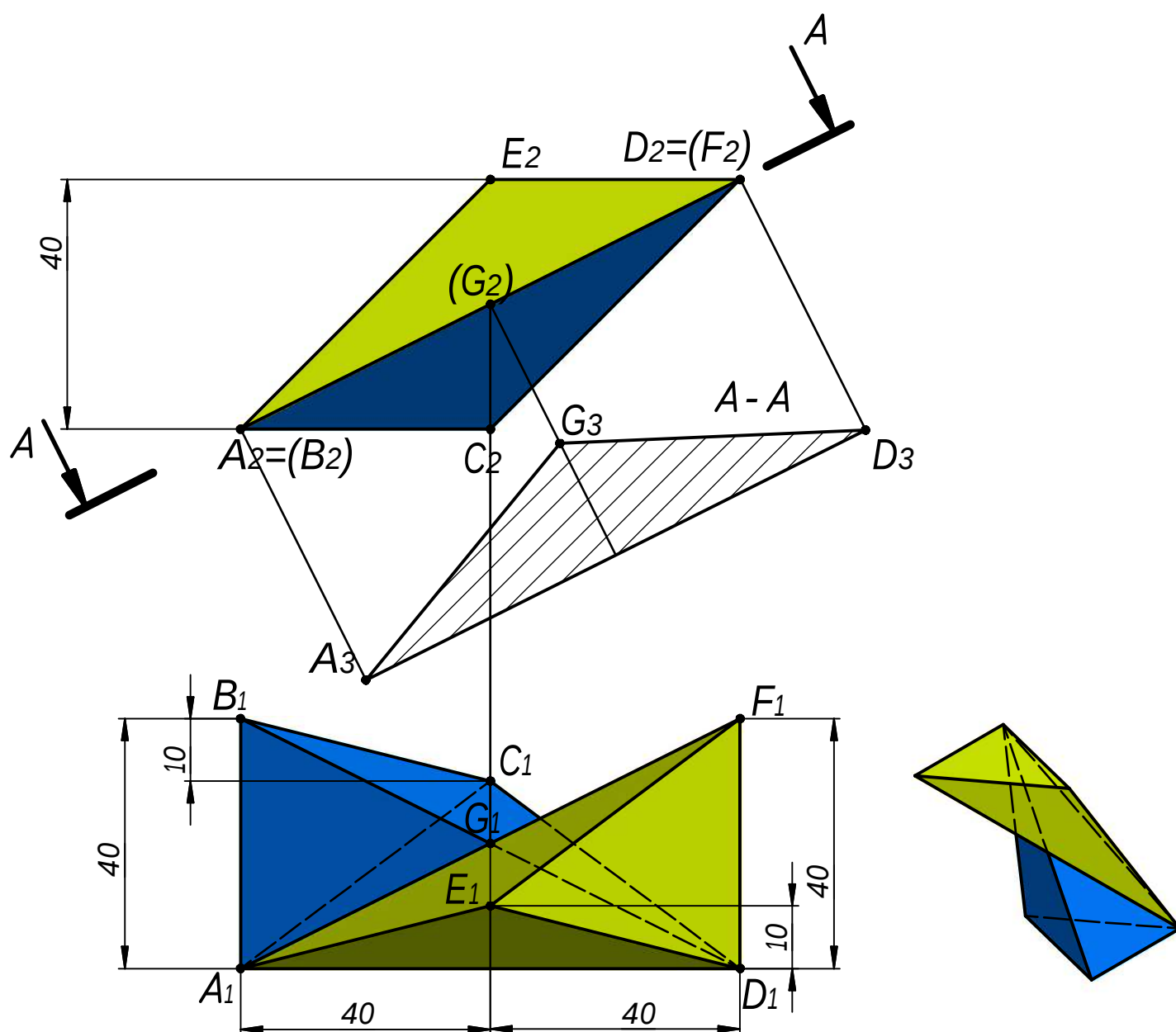
Баллы	Критерии выставления баллов
10	Полное решение. Обоснованно получен правильный ответ
5	Обоснованно получен промежуточный результат (расстояние от точки D до прямой EF, либо синус угла EFD, либо другой важный результат)
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных критериев

Задача 4а.

Даны две проекции треугольника ABC и горизонтальная проекция треугольника DEF. Плоскость треугольника DEF параллельна плоскости треугольника ABC и выше ее на 40 мм.

Требуется:

- 1) построить фронтальную и горизонтальную проекции двух пирамид ABCD и DEFA с соблюдением проекционной связи;
- 2) построить проекции фигуры, общей для обеих пирамид;
- 3) определить натуральную величину искомой фигуры с помощью графических построений;
- 4) обозначить видимость ребер пирамид;
- 5) оформить все изображения по ГОСТ 2.303-306;
- 6) обозначить и сохранить на чертеже линии построения натуральной величины фигуры, общей для обеих пирамид.



Задача 5 (15 баллов). Даны две проекции призмы. Требуется:

- 1) дополнить заданную деталь вставками по привязкам в точках А и В, в соответствии с ориентацией по координатным осям;
- 2) выполнить для полученной детали три вида в проекционной связи;
- 3) на месте соответствующего основного вида оформить изображение как соединение половины вида и половина разреза А-А
- 4) главный вид оформить фронтальным разрезом;
- 5) все изображения оформить по ГОСТ 2.305-2008;
- 6) решение оформить линиями по ГОСТ 2.303-68;
- 7) штриховку выполнить по ГОСТ 2.306-68;
- 8) на видах сохранить линии невидимого контура, на разрезах линии невидимого контура не изображать.

Все построения выполнить на обратной стороне листа.

