

Решение варианта № 1 (11 класс, отборочный этап)

1. Производство керамических изделий состоит из 3 последовательных этапов: формование керамического изделия на гончарном круге в течение 15 минут, сушка в течение 10 минут, и обжиг в течение 30 минут. Требуется изготовить 75 изделий. Как распределить 13 мастеров на формовщиков и обжигальщиков для работы на 1 и 3 этапах соответственно в течение всего отведенного на этап времени (для сушки изделий рабочие не требуются), чтобы выполнить работу за кратчайшее время? В ответ запишите кратчайшее время (в минутах), необходимое для выполнения всей работы. Ответ дайте в виде числа без указания размерности. (5 баллов)

Решение. Формовщиков – 4, декораторов – 8. Тринадцатый мастер может работать на любом этапе, может вообще не участвовать в работе. В этом случае время работы – 325 минут ($55 + \left(\left[\frac{75}{4}\right] + 1\right) \cdot 15 = 325$). Покажем, что при других расстановках время работы больше. Предположим, что формовщиков меньше 4 (3, 2 или 1), то время на формовку не меньше 375 минут. Если же декораторов меньше 8, то время на выполнение 3 этап не менее 330 минут. **Ответ: 325**

2. Решите уравнение $\frac{15}{x(\sqrt[3]{35-8x^3})} = 2x + \sqrt[3]{35-8x^3}$. В ответ запишите сумму всех полученных решений. (5 баллов)

Решение.

$$u = \sqrt[3]{35-8x^3}, \quad 8x^3 = 35 - u^3,$$

$$\begin{cases} \frac{15}{xu} = 2x + u, \\ 8x^3 + u^3 = 35, \end{cases} \quad t = 2xu, v = 2x + u \Rightarrow \begin{cases} \frac{30}{t} = v, \\ v(v^2 - 3t) = 35, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 6, \\ v = 5, \end{cases}$$

$$\begin{cases} xu = 3, \\ 2x + u = 5, \end{cases} \Rightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 2,5.$$

Ответ: 2,5

3. Найдите все натуральные значения n , при которых

$$\cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{4\pi}{9} + \dots + \cos \frac{2\pi n}{9} = \cos \frac{\pi}{9}, \text{ и } \log_2^2 n + 45 < \log_2 8n^{13}.$$

В ответ запишите сумму полученных значений n . (6 баллов)

Решение.

$$\begin{aligned} \cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{4\pi}{9} + \dots + \cos \frac{2\pi n}{9} = \cos \frac{\pi}{9} &\Leftrightarrow 2 \sin \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} + 2 \sin \frac{\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} + \dots + \\ 2 \sin \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi n}{9} = 2 \sin \frac{\pi}{9} \cos \frac{\pi}{9} &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\sin \frac{3\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{5\pi}{9} - \sin \frac{3\pi}{9} + \dots + \sin \frac{\pi}{9} (1 + 2n) - \sin \frac{\pi}{9} (2n - 1) = \sin \frac{2\pi}{9} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{9} (1 + 2n) - \sin \frac{\pi}{9} = \sin \frac{2\pi}{9} &\Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{9} (1 + 2n) = \sin \frac{2\pi}{9} + \sin \frac{\pi}{9} \Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{9} (1 + 2n) = \\ 2 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{18} &\Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{9} (1 + 2n) = \sin \frac{4\pi}{9} \Leftrightarrow 2 \sin \left(\frac{\pi n}{9} - \frac{\pi}{6}\right) \cos \left(\frac{\pi n}{9} + \frac{5\pi}{18}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi n}{9} - \frac{\pi}{6} = \\ \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \frac{\pi n}{9} + \frac{5\pi}{18} = \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}, &\Leftrightarrow 2n = 3(6k + 1), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad n = 2 + \end{aligned}$$

$9m, m \in Z$. Поскольку n - натуральное число, то первое соотношение не имеет место (четное число не может быть равно нечетному). Итак, $n = 2 + 9m, m \in Z, m \geq 0$.

Решим неравенство $\log_2^2 n + 45 < \log_2 8 n^{13} \Leftrightarrow \log_2^2 n - 13 \log_2 n + 42 < 0, \Leftrightarrow (\log_2 n - 6)(\log_2 n - 7) < 0, \Leftrightarrow 2^6 < n < 2^7, \Leftrightarrow 64 < 2 + 9m < 128, m \in Z, m \geq 0 \Leftrightarrow 6\frac{8}{9} < m < 14, m \in Z, m \geq 0 \Leftrightarrow m = 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13. S_7 = \frac{65+119}{2} \cdot 7 = 644$.

Ответ: 644

4. Сколькими способами можно распилить ствол бамбука (неоднородный природный материал) длиной 4 м на три части, длины которых кратны 1 дм, и из которых можно составить треугольник? (12 баллов)

Решение.

Пусть A_n — точка ствола на расстоянии n дм от основания. Будем пилить в точках A_p и $A_q, p < q$. Для соблюдения неравенства треугольника необходимо и достаточно, чтобы каждая часть получилась не длиннее 19 дм:

$$p \leq 19, \quad 21 \leq q \leq p + 19.$$

Таким образом, число способов выбрать p и q будет

$$\sum_{p=1}^{19} (p + 19 - 20) = 0 + 1 + 2 + \dots + 18 = \frac{18 \cdot 19}{2} = 171.$$

Ответ: 171

5. Сколько решений в натуральных числах x, y имеет неравенство $x/76 + y/71 < 1$? (12 баллов)

Решение.

Все решения лежат в прямоугольнике

$$\Pi = \{0 < x < 76; 0 < y < 41\}.$$

Нас интересует количество целочисленных точек, лежащих внутри Π ниже его диагонали $x/76 + y/41 = 1$. На самой диагонали нет целочисленных точек, т.к. 76 и 41 взаимно просты. Так что получаем половину количества целочисленных точек внутри Π :

$$\frac{75 \cdot 40}{2} = 1500.$$

Ответ: 1500

6. Какую наибольшую площадь может иметь прямоугольник, координаты вершин которого удовлетворяют уравнению

$$|y + 1|(y^2 + 2y + 28) + |x - 2| = 9(y^2 + 2y + 4),$$

а стороны параллельны осям координат?

(12 баллов)

Решение.

$$|y + 1|((y + 1)^2 + 27) + |x - 2| = 9(y + 1)^2 + 27$$

Замена: $x_1 = y + 1, y_1 = x - 2$.

$$\text{Тогда } |y_1| = -(|x_1| - 3)^3$$

Площадь прямоугольника при такой замене не меняется. Площадь вычисляется по формуле

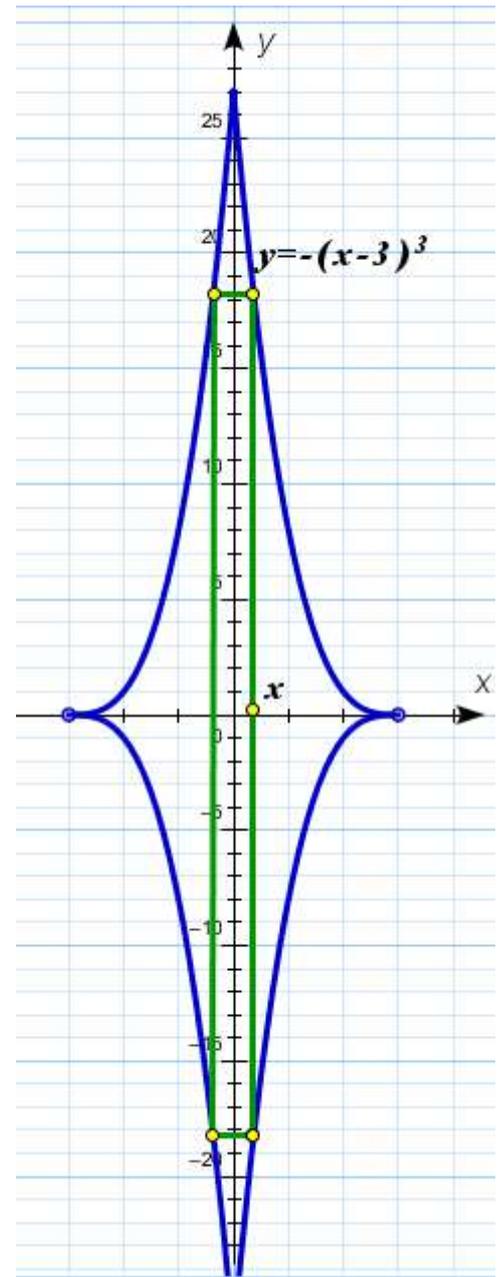
$$S(x) = -4x(x - 3)^3, x \in [0; 3].$$

Имеем

$$\begin{aligned} S'(x) &= -4((x - 3)^3 + 3x(x - 3)^2) \\ &= -4(x - 3)^2(4x - 3). \end{aligned}$$

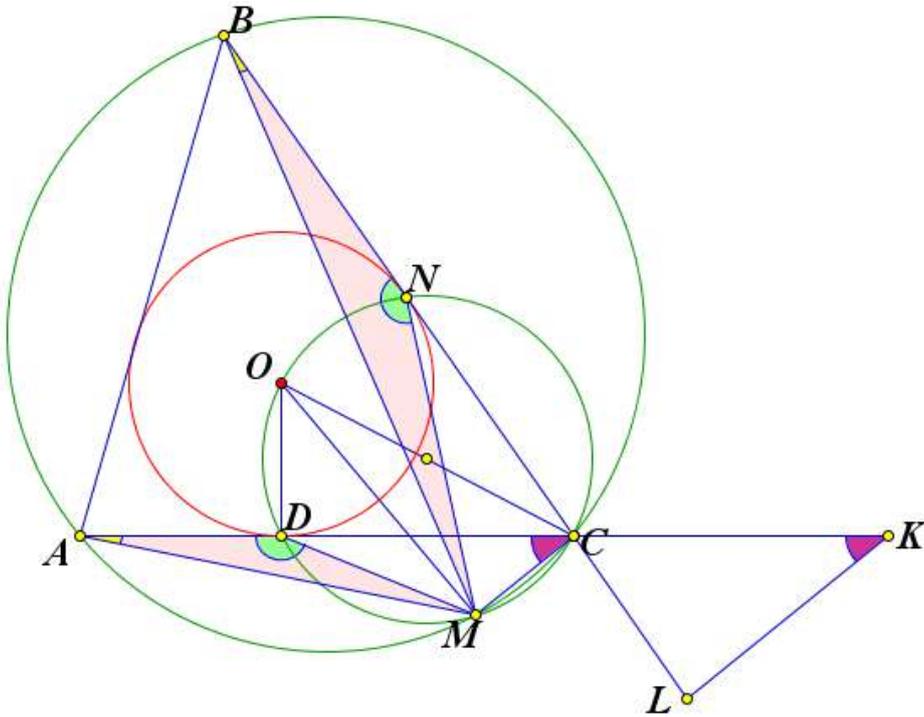
В точке $x = \frac{3}{4}$ функция $S(x)$ принимает наибольшее значение. $S_{max} = S(0,75) = 34,171875$.

Ответ: 34,171875



7. Вписанная в треугольник ABC окружность радиуса 3 касается стороны AC в точке D . На продолжениях сторон AC и BC за точку C взяты точки K и L соответственно, угол CKL равен 30° . Длины отрезков AK и BL равны полупериметру треугольника ABC . На описанной около треугольника ABC окружности выбрана точка M так, что $CM \parallel KL$. Найдите косинус угла ACB , если длина отрезка DM равна 6. (16 баллов)

Решение. Докажем, что угол $\angle OMC = 90^\circ$. Построим окружность S с диаметром OC . Обозначим точку пересечения (отличную от C) этой окружности с описанной около треугольника ABC через M_1 . Обозначим точку пересечения (отличную от C) окружности S с прямой, параллельной KL , через M_2 . Необходимо доказать, что $M_1 = M_2$.



Докажем подобие треугольников ADM_1 и BNM_1 . Согласно свойствам вписанных углов, имеем $\angle M_1AC = \angle M_1BC \Rightarrow \angle M_1AB = \angle M_1BN$; $\angle M_1NC = \angle M_1DC \Rightarrow \angle ADM_1 = \angle BNM_1$. Следовательно, $\triangle ADM_1 \sim \triangle BNM_1$ по двум углам. Тогда $\frac{DM_1}{M_1N} = \frac{AD}{BN}$. Поскольку длины отрезков AK и BL равны полупериметру треугольника ABC , то $AD = CL, BN = CK$. Получаем $\frac{DM_1}{M_1N} = \frac{CL}{CK}$.

Обозначим $\angle ACM_2 = \angle CKL = \alpha$, $\angle KCL = \beta$.

Тогда $\angle ACB = \beta, \angle M_2CB = \alpha + \beta$. Для треугольников DM_2C и M_2NC применим теорему синусов: $\frac{DM_2}{\sin \alpha} = \frac{M_2C}{\sin \angle M_2DC}$; $\frac{NM_2}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{M_2C}{\sin \angle M_2NC}$. Поскольку $\angle M_2DC = \angle M_2NC$, то $\frac{DM_2}{NM_2} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. Поскольку $\angle CLK = 180 - (\alpha + \beta)$, то, применяя теорему синусов для треугольника CLK , имеем $\frac{CL}{CK} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. Таким образом, $\frac{DM_2}{NM_2} = \frac{CL}{CK} = \frac{DM_1}{NM_1}$. Точки D, N, M_1, M_2 лежат на одной окружности, следовательно, $M_1 = M_2$.

Треугольник OMC прямоугольный, радиус описанной окружности равен $CO/2$. Эта же окружность описана около треугольника CDM .

$$OC = \frac{OD}{\sin(\beta/2)} = \frac{3}{\sin(\beta/2)}$$

Угол CKL равен углу DCM . Тогда $\sin CKL = \frac{DM}{2R_{\text{оп}}} = \frac{DM}{OC} = 0,5$. Следовательно, $\sin(\beta/2) = 0,25, \cos \beta = 1 - 2 \sin^2(\beta/2) = 7/8 = 0,875$.

Ответ: 0,875

8. Укажите наименьшее значение параметра a , при котором уравнение имеет хотя бы одно решение

$$2 \sin\left(\pi - \frac{\pi x^2}{12}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6} \sqrt{9 - x^2}\right) + 1 = a + 2 \sin\left(\frac{\pi}{6} \sqrt{9 - x^2}\right) \cos\left(\frac{\pi x^2}{12}\right). \quad (16 \text{ баллов})$$

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$2 \sin\left(\pi - \frac{\pi x^2}{12}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6} \sqrt{9 - x^2}\right) - 2 \sin\left(\frac{\pi}{6} \sqrt{9 - x^2}\right) \cos\left(\pi - \frac{\pi x^2}{12}\right) = a - 1, \text{ или}$$

$$\sin\left(\pi - \frac{\pi x^2}{12} - \frac{\pi}{6} \sqrt{9 - x^2}\right) = \frac{a-1}{2}.$$

Рассмотрим отдельно выражение $t = \pi - \frac{\pi x^2}{12} - \frac{\pi}{6} \sqrt{9 - x^2}$, его можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \pi - \frac{\pi x^2}{12} - \frac{\pi}{6} \sqrt{9 - x^2} &= \frac{\pi}{12} (12 - x^2 - 2\sqrt{9 - x^2}) = \frac{\pi}{12} (9 - x^2 - 2\sqrt{9 - x^2} + 3) \\ &= \frac{\pi}{12} ((\sqrt{9 - x^2} - 1)^2 + 2). \end{aligned}$$

Учитывая, что корень принимает значения от 0 до 3, то $t \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$, тогда $\sin t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Найдем, в каких пределах изменяется параметр: $\frac{1}{2} \leq \frac{a-1}{2} \leq 1 \Rightarrow 2 \leq a \leq 3$.

Ответ: 2

9. Ромб $ABCD$ является основанием пирамиды с вершиной S . Все ее боковые грани наклонены к плоскости основания под одинаковым углом 60° . Точки M, N, K и L являются серединами сторон ромба $ABCD$. На прямоугольнике $MNKL$, как на основании, построен прямоугольный параллелепипед. Ребра верхней грани параллелепипеда (противоположной грани $MNKL$) пересекают боковые ребра пирамиды $SABCD$, соответственно, в точках F, P, R и Q . Объем многогранника с вершинами в точках M, N, K, L, F, P, R, Q равен $12\sqrt{3}$, а радиус вписанной в ромб $ABCD$ окружности равен 2,4. Найдите сторону ромба $ABCD$. (16 баллов)

Решение.

Высота пирамиды $SO = h$. Диагонали ромба $AC = d_1, BD = d_2$.

Высота параллелепипеда $h/2$, стороны основания параллелепипеда равны $d_1/2$ и $d_2/2$.

Объем параллелепипеда равен

$$V_{\Pi} = \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} \cdot \frac{h}{2}$$

Объем многогранника равен

$$V_M = V_{\Pi} - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{d_1}{4} \cdot \frac{d_2}{4} \cdot \frac{h}{2} = \frac{d_1 d_2 h}{8} - \frac{d_1 d_2 h}{48} = \frac{5d_1 d_2 h}{48}$$

По условию $\frac{5d_1d_2h}{48} = 12\sqrt{3}$.

Поскольку радиус вписанной в этот ромб окружности равен 2,4, а все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60° , то $h = 2,4\sqrt{3}$. Следовательно,

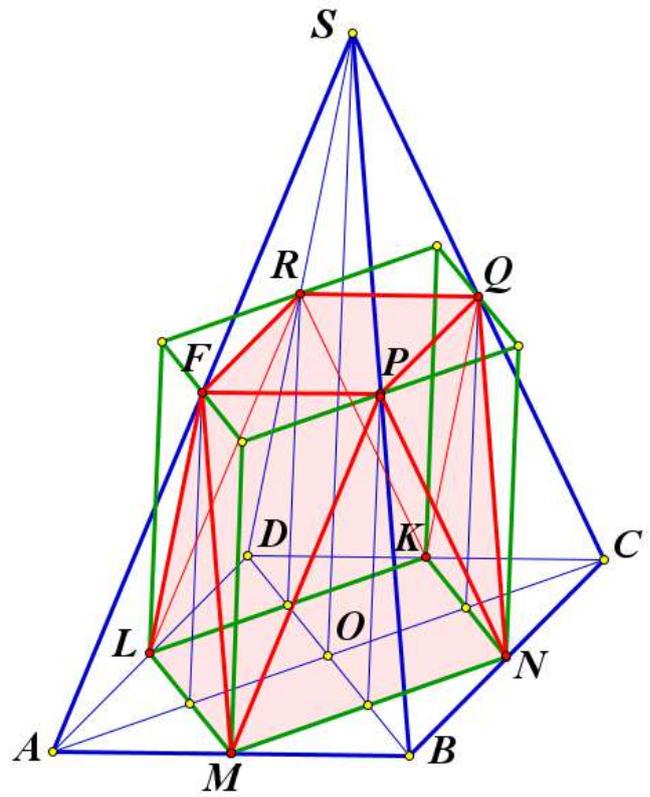
$$\frac{5d_1d_2 \cdot 2,4\sqrt{3}}{48} = 12\sqrt{3}, \text{ и } d_1d_2 = 48.$$

Поскольку $S_{ABCD} = \frac{d_1d_2}{2}$, и

$$S_{ABCD} = \frac{4AB \cdot r_{\text{вп}}}{2} = 4,8 \cdot AB, \text{ то}$$

$$4,8 \cdot AB = 24 \Rightarrow AB = 5.$$

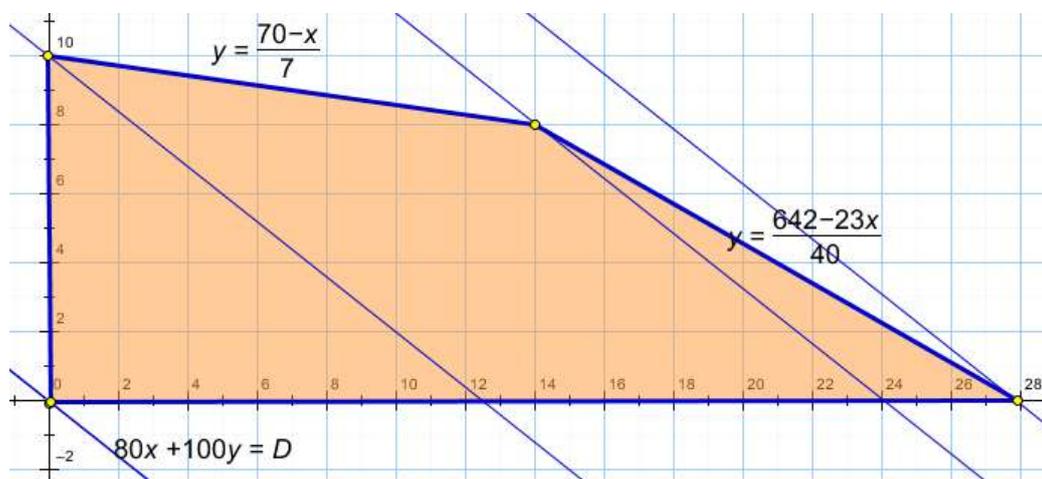
Ответ: 5



Решение варианта № 2 (11 класс, отборочный этап)

1. Цех выпускает изделия видов A и B . На одно изделие вида A расходуется 10 кг стали и 23 кг цветных металлов, а на изделие вида B – 70 кг стали и 40 кг цветных металлов. От реализации изделия вида A прибыль составляет 80 тысяч рублей, вида B – 100 тысяч рублей. Сменный фонд стали составляет 700 кг, цветных металлов – 642 кг. Сколько изделий видов A и B нужно выпускать за смену, чтобы получить наибольшую прибыль от продажи изделий, если расход ресурсов не должен превышать выделенных на смену фондов? В ответ запишите наибольшую прибыль (в тысячах рублей), которая может быть получена при этих условиях. Ответ дайте в виде числа без указания размерности. (5 баллов)

Решение. Пусть x – количество изделий вида A , y – количество изделий вида B . Тогда прибыль за смену вычисляется по формуле $D = 80x + 100y$, причем $10x + 70y \leq 700$, $23x + 40y \leq 642$, x и y – целые неотрицательные числа.



$$10x + 70y \leq 700 \Leftrightarrow y \leq 10 - \frac{x}{7}, \quad 23x + 40y \leq 642 \Leftrightarrow y \leq 16,05 - \frac{23x}{40}.$$

Точка пересечения прямых $x + 7y = 70$ и $23x + 40y = 642$ есть точка с координатами $x = 14$, $y = 8$. В этом случае $D = 80 \cdot 14 + 100 \cdot 8 = 1920$, но при $x = \frac{642}{23} = 27\frac{21}{23}$, $y = 0$ имеем максимальное значение функции $D = 80x + 100y$ при неотрицательных x и y , удовлетворяющим неравенствам $10x + 70y \leq 700$, $23x + 40y \leq 642$. Это значение равно $2233\frac{1}{23}$. Поскольку x и y – целые числа, то при $y = 0$, $x = 27$ доход $D = 2160$, при $y = 1$, $x \leq \frac{602}{23}$, $x = 26$, $D = 2180$, при $y = 2$, $x \leq \frac{562}{23}$, $x = 24$, $D = 2120$. Таким образом, максимальный доход равен 2180 тыс. рублей при условии выпуска одного изделия вида A и 26 изделий вида B .

Ответ: 2180

2. Решите уравнение $\frac{x}{3} + \frac{x}{\sqrt{x^2-9}} = \frac{35}{12}$. В ответ запишите сумму всех полученных решений.
(5 баллов)

Решение. $x = \frac{3}{\sin t}, t \in (0; \frac{\pi}{2})$

$$\frac{1}{\sin t} + \frac{1}{\cos t} = \frac{35}{12}, \quad 24(\sin t + \cos t) = 35((\sin t + \cos t)^2 - 1),$$

$$z = \sin t + \cos t, \quad 35z^2 - 24z - 35 = 0,$$

$$z_1 = -\frac{5}{7}, z_2 = \frac{7}{5}, \quad \sin t + \cos t = \frac{7}{5},$$

$$y = \sin t, \quad y + \sqrt{1-y^2} = \frac{7}{5},$$

$$\sin t_1 = \frac{3}{5}, \sin t_2 = \frac{4}{5}, \quad x_1 = 5, \quad x_2 = \frac{15}{4}, \quad x_1 + x_2 = 5 + \frac{15}{4}.$$

Ответ: 8,75

3. Решите неравенство $x^2 \leq 2([\sqrt[3]{x} + 0,5] + [\sqrt[3]{x}])$, где $[x]$ – целая часть числа x , т.е. $[x]$ – целое число, для которого верно неравенство $[x] \leq x < [x] + 1$. В ответ запишите разность наибольшего и наименьшего решений неравенства.

Решение. Сделаем замену $t = \sqrt[3]{x}$. Имеем $t^6 \leq 2([t + 0,5] + [t])$.

$$1. t < 0 \Rightarrow [t + 0,5] \leq 0, [t] < 0 \Rightarrow [t + 0,5] + [t] < 0, t^6 < 0.$$

Решений нет.

$$2. 0 \leq t < 0,5 \Rightarrow [t + 0,5] = 0, [t] = 0 \Rightarrow t^6 \leq 0, t = 0, x = 0.$$

$$3. 0,5 \leq t < 1 \Rightarrow [t + 0,5] = 1, [t] = 0 \Rightarrow t^6 \leq 2, \quad 0,5 \leq t \leq \sqrt[6]{2},$$

$$\sqrt[6]{2} > 1 \Rightarrow 0,5 \leq t < 1 \Rightarrow 0,125 \leq x < 1.$$

$$4. 1 \leq t < 1,5 \Rightarrow [t + 0,5] = 1, [t] = 1 \Rightarrow t^6 \leq 4, \quad 1 \leq t \leq \sqrt[3]{2},$$

$$\sqrt[6]{4} < 1,5 \Rightarrow 1 \leq x < 2.$$

5. $1,5 \leq t \Rightarrow t^6 = t^5 \cdot t \geq (1,5)^5 \cdot t = 7\frac{19}{32} \cdot t > 4t + 1 = 2((t + 0,5) + t) \geq 2([t + 0,5] + [t]) \Rightarrow t^6 > 2([t + 0,5] + [t])$. Неравенство $t^6 \leq 2([t + 0,5] + [t])$ решений не имеет.

Итак, $x \in \{0\} \cup [0,125; 2]$.

Ответ: 2

4. Сколькими способами можно разложить число 210 в произведение четырех натуральных чисел? Порядок сомножителей неважен. (12 баллов)

Решение.

Разложим 210 в произведение простых чисел: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Посмотрим, как 4 простых делителя могут распределиться по искомым сомножителям.

1) $4+0+0+0$ — 1 способ.

2) $3+1+0+0$ — $C_4^3 = 4$ способа.

3) $2+2+0+0$ — $C_4^2/2 = 3$ способа.

4) $2+1+1+0$ — $C_4^2 = 6$ способов.

5) $1+1+1+1$ — 1 способ.

Ответ: 15.

Ответ: 15

5. Последовательность задана рекуррентно:

$x_0 = 0$, $x_{n+1} = \frac{(n^2+n+1)x_n+1}{n^2+n+1-x_n}$. Найдите x_{8453} . (12 баллов)

Решение.

∴ Вычисляем $x_1 = \frac{1}{1} = 1$, $x_2 = \frac{4}{2} = 2$, $x_3 = \frac{15}{5} = 3$, появляется гипотеза: $x_n = n$.

Проверим по индукции:

$$x_{n+1} = \frac{(n^2+n+1)n+1}{n^2+n+1-n} = \frac{n^3+n^2+n+1}{n^2+1} = n+1.$$

Ответ: 8453

6. Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольника, координаты вершин которого удовлетворяют уравнению $|y-x| = (y+x+1)(5-x-y)$, а стороны параллельны прямым $y=x$ и $y=-x$? В ответ запишите квадрат значения найденной площади. (12 баллов)

Решение.

Замена: $x_1 = x+y$, $y_1 = y-x$. Эта замена увеличивает все размеры в $\sqrt{2}$ раз. Имеем $|y_1| = (x_1+1)(5-x_1)$, $S(x_1) = 4(x_1-2)(x_1+1)(5-x_1)$, $x_1 \in (2; 5)$.

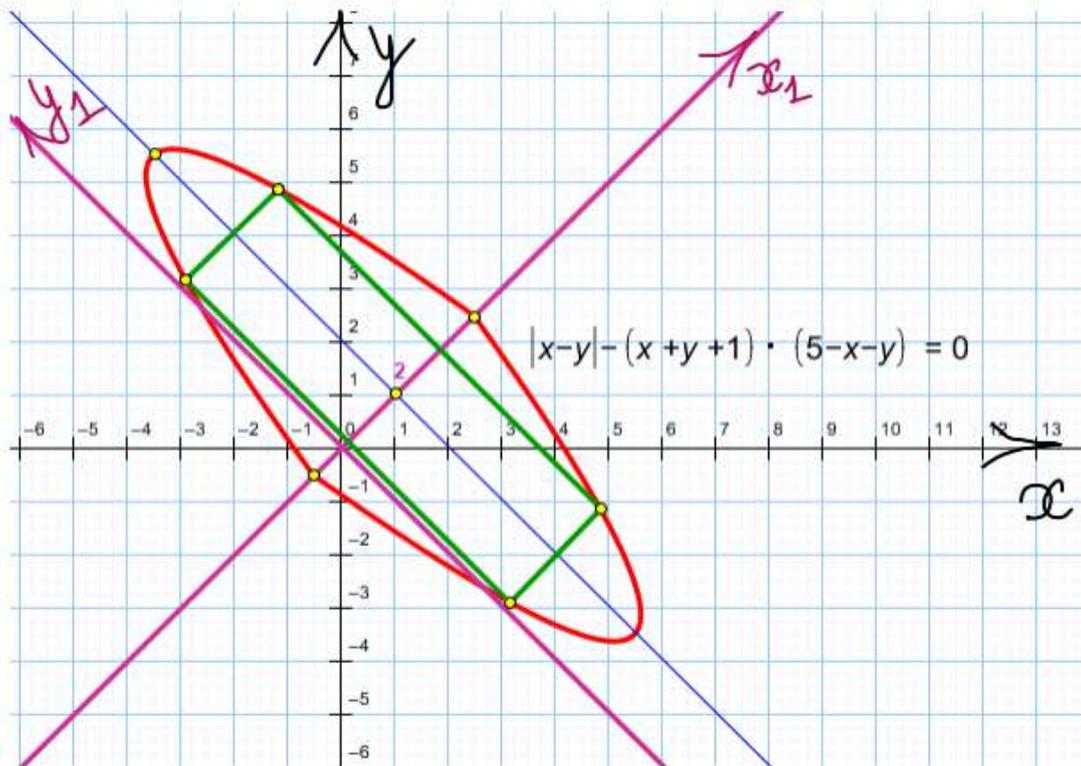
$$S'(x_1) = 4((x_1+1)(5-x_1) + (x_1-2)(5-x_1) - (x_1-2)(x_1+1)) = \\ = -12(x_1^2 - 4x_1 + 1) = -12(x_1 - 2 - \sqrt{3})(x_1 - 2 + \sqrt{3}) = 0.$$

Наибольшее значение площадь принимает в точке $x_1 = 2 + \sqrt{3}$. В системе координат Ox_1y_1 наибольшее значение площади равно

$$S(2 + \sqrt{3}) = 4\sqrt{3}(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3}) = 24\sqrt{3}.$$

В исходной системе координат $S_{max} = 12\sqrt{3}$. $(S_{max})^2 = 432$. Ответ: **432**

Ответ: 432

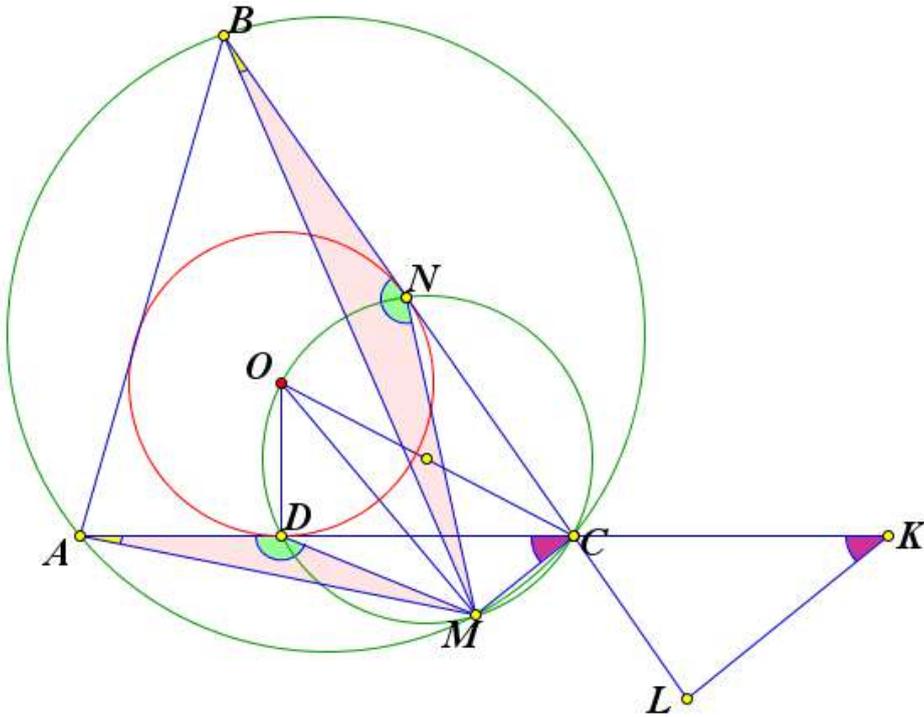


7. Вписанная в треугольник ABC окружность радиуса 2 касается стороны AC в точке D , угол C этого треугольника равен $\arcsin \frac{\sqrt{15}}{8}$. На продолжениях сторон AC и BC за точку C взяты точки K и L соответственно. Длины отрезков AK и BL равны полупериметру треугольника ABC . На описанной около треугольника ABC окружности выбрана точка M так, что $CM \parallel KL$. Найдите синус угла CKL , если длина отрезка DM равна 4. (16 баллов)

Решение. Докажем, что угол $\angle OMC = 90^\circ$. Построим окружность S с диаметром OC . Обозначим точку пересечения (отличную от C) этой окружности с описанной около треугольника ABC через M_1 . Обозначим точку пересечения (отличную от C) окружности S с прямой, параллельной KL , через M_2 . Необходимо доказать, что $M_1 = M_2$.

Докажем подобие треугольников ADM_1 и BNM_1 . Согласно свойствам вписанных углов, имеем $\angle M_1AC = \angle M_1BC \Rightarrow \angle M_1AB = \angle M_1BN$; $\angle M_1NC = \angle M_1DC \Rightarrow \angle ADM_1 = \angle BNM_1$. Следовательно, $\triangle ADM_1 \sim \triangle BNM_1$ по двум углам. Тогда $\frac{DM_1}{M_1N} =$

$\frac{AD}{BN}$. Поскольку длины отрезков AK и BL равны полупериметру треугольника ABC , то $AD = CL, BN = CK$. Получаем $\frac{DM_1}{M_1N} = \frac{CL}{CK}$.



Обозначим $\angle ACM_2 = \angle CKL = \alpha$, $\angle KCL = \beta$.

Тогда $\angle ACB = \beta$, $\angle M_2CB = \alpha + \beta$. Для треугольников DM_2C и M_2NC применим теорему синусов: $\frac{DM_2}{\sin \alpha} = \frac{M_2C}{\sin \angle M_2DC}$; $\frac{NM_2}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{M_2C}{\sin \angle M_2NC}$. Поскольку $\angle M_2DC = \angle M_2NC$, то $\frac{DM_2}{NM_2} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. Поскольку $\angle CLK = 180 - (\alpha + \beta)$, то, применяя теорему синусов для треугольника CLK , имеем $\frac{CL}{CK} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. Таким образом, $\frac{DM_2}{NM_2} = \frac{CL}{CK} = \frac{DM_1}{NM_1}$. Точки D, N, M_1, M_2 лежат на одной окружности, следовательно, $M_1 = M_2$.

Треугольник OMC прямоугольный, радиус описанной окружности равен $CO/2$. Эта же окружность описана около треугольника CDM .

$$OC = \frac{OD}{\sin \angle DCO} = \frac{2}{\sqrt{(1 - \cos \angle ACB)/2}} = 8.$$

Угол CKL равен углу DCM . Тогда $\sin CKL = \frac{DM}{2R_{\text{оп}}} = \frac{DM}{OC} = 0,5$.

Ответ: 0,5

8. Укажите наибольшее значение параметра p , при котором уравнение имеет хотя бы одно решение

$$2 \cos\left(2\pi - \frac{\pi x^2}{6}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} \sqrt{9 - x^2}\right) - 3 = p - 2 \sin\left(-\frac{\pi x^2}{6}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} \sqrt{9 - x^2}\right). \quad (16 \text{ баллов})$$

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$\cos\left(2\pi - \frac{\pi x^2}{6}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} \sqrt{9 - x^2}\right) + \sin\left(2\pi - \frac{\pi x^2}{6}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} \sqrt{9 - x^2}\right) = \frac{p+3}{2}, \text{ или}$$

$$\cos\left(2\pi - \frac{\pi x^2}{6} - \frac{\pi}{3}\sqrt{9-x^2}\right) = \frac{p+3}{2}.$$

Рассмотрим отдельно выражение $t = 2\pi - \frac{\pi x^2}{6} - \frac{\pi}{3}\sqrt{9-x^2}$, его можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} 2\pi - \frac{\pi x^2}{6} - \frac{\pi}{3}\sqrt{9-x^2} &= \frac{\pi}{6}(12 - x^2 - 2\sqrt{9-x^2}) = \frac{\pi}{6}(9 - x^2 - 2\sqrt{9-x^2} + 3) \\ &= \frac{\pi}{6}\left((\sqrt{9-x^2} - 1)^2 + 2\right). \end{aligned}$$

Учитывая, что корень принимает значения от 0 до 3, то $t \in \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$, тогда $\cos t \in \left[-1; \frac{1}{2}\right]$. Найдем, в каких пределах изменяется параметр:

$$-1 \leq \frac{p+3}{2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -5 \leq p \leq -2.$$

Ответ: -2

9. Боковая грань правильной треугольной пирамиды $SABC$ наклонена к плоскости основания ABC под углом $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. Точки M, N, K являются серединами сторон основания ABC . Треугольник MNK является нижним основанием прямой призмы. Ребра верхнего основания призмы пересекают боковые ребра пирамиды $SABC$, соответственно, в точках F, P и R . Площадь полной поверхности многогранника с вершинами в точках M, N, K, F, P, R равна $53\sqrt{3}$. Найдите сторону треугольника ABC . (16 баллов)

Решение.

Высота пирамиды $SO = h$. Сторона основания пирамиды $AC = a$.

Высота призмы $3h/4$, стороны основания призмы равны $a/2$.

Площадь треугольника MNK :

$$S_{MNK} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$$

Площадь треугольника FPR :

$$S_{FPR} = \frac{a^2\sqrt{3}}{64}$$

Площадь треугольника MPN :

$$S_{MPN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{3h}{4}, \quad S_{MPN} = S_{NPK} = S_{KRM}.$$

Площадь треугольника FPM : $S_{FPM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{4} \cdot \sqrt{\frac{9h^2}{16} + \frac{3a^2}{64}}, \quad S_{FPM} = S_{PRK} = S_{RFM}.$

Поскольку радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен $\frac{a\sqrt{3}}{6}$, а все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$, то $h = a\sqrt{3}/8$.

По условию площадь полной поверхности многогранника с вершинами в точках M, N, K, F, P, R равна $53\sqrt{3}$, т. е.

$$\begin{aligned}
 S_{\text{MH}} &= S_{MNK} + S_{FPR} + 3S_{MPN} + 3S_{FPN} = \\
 &= \frac{a^2\sqrt{3}}{16} + \frac{a^2\sqrt{3}}{64} + \frac{9ah}{16} + \frac{3a}{8} \sqrt{\frac{9h^2}{16} + \frac{3a^2}{64}} = \\
 &= \frac{a^2\sqrt{3}}{16} + \frac{a^2\sqrt{3}}{64} + \frac{9a^2\sqrt{3}}{128} \\
 &\quad + \frac{3a}{8} \sqrt{\frac{27a^2}{16 \cdot 64} + \frac{3a^2}{64}} = \\
 &= \frac{a^2\sqrt{3}}{16} + \frac{a^2\sqrt{3}}{64} + \frac{9a^2\sqrt{3}}{128} + \frac{15a^2\sqrt{3}}{256} \\
 &= \frac{53a^2\sqrt{3}}{16^2} = 53\sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

Следовательно, $a = 16$.

Ответ: 16

