Олимпиада школьников «Шаг в будущее»

Отборочный этап

10 класс

1. Найдите наибольшее значение выражения x+y, где x,y – решения в целых числах уравнения $3x^2 + 5y^2 = 345$

Решение

Заметим, что 345 и $5y^2$ делятся на 5, тогда и $3x^2$ должно делиться на 5. Следовательно, $x = 5t, t \in Z$. Аналогично, $y = 3n, n \in Z$. После сокращения, уравнение примет вид $5t^2 + 3n^2 = 23$. Следовательно, $t^2 \le \frac{23}{5}$, $n^2 \le \frac{23}{3}$ или $|t| \le 2,\ |n| \le 2$. Перебрав соответствующие значения t, n, получим , что $|t| = 2, |n| = 1$ или

$$\begin{cases} x_1 = -10 \\ y_1 = -3 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -10 \\ y_2 = 3 \end{cases}, \begin{cases} x_3 = 10 \\ y_3 = -3 \end{cases}, \begin{cases} x_4 = 10 \\ y_4 = 3 \end{cases}.$$

Наибольшее значение выражения $x + y$ равно 10+3=13.

Ответ. 13.

2. Автомобиль проехал половину пути со скоростью 60 км/ч, затем одну треть оставшегося пути со скоростью 120 км/ч и оставшееся расстояние со скоростью 80 км/ч.

   Найдите среднюю скорость автомобиля в этом рейсе. Ответ дайте в км/ч.

Решение: Пусть x часов автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, тогда $60x = \frac{s}{2}$ Пусть y часов автомобиль ехал со скоростью 120 км/ч, тогда $120y = \frac{s}{6}$. Пусть z часов автомобиль ехал со скоростью 80 км/ч, тогда $80z = \frac{s}{3}$. По определению $v_{ср} = \frac{s}{t_{общ}}$. Тогда

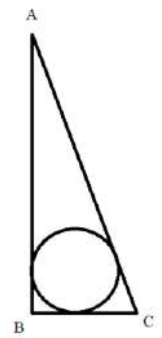
$$v_{ср} = \frac{s}{x+y+z} = \frac{s}{\frac{s}{120} + \frac{s}{720} + \frac{s}{240}} = \frac{1}{\frac{1}{120} + \frac{1}{6\cdot 120} + \frac{1}{2\cdot 120}} = \frac{6\cdot 120}{10} = 72.$$

Ответ: 72.

3.

Найдите радиус окружности, касающейся меньшей стороны и продолжений двух других сторон прямоугольного треугольника, если две его меньшие стороны равны 13 и 84 соответственно.

Решение



1. $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$;

   $AC = \sqrt{84^2 + 13^2} = \sqrt{7056 + 169} = \sqrt{7225} = 85$
2. $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC$; $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 84 \cdot 13 = 42 \cdot 13 = 546$
3. $r_в = \frac{S_\Delta}{p} = \frac{546 \cdot 2}{84 + 13 + 85} = \frac{1092}{182} = 6$

Ответ: 6

4.

На координатной прямой отмечено 16 точек, которые пронумерованы слева направо. Координата любой точки, кроме крайних, равна полусумме координат двух соседних точек. Найдите координату пятой точки, если первая точка имеет координату 2, а шестнадцатая – координату 47.

Решение

Решение. Пусть a, b и c - координаты трёх точек, отмеченных подряд (слева направо). Тогда $b = \frac{a+c}{2}$, значит, вторая точка является серединой отрезка с концами в соседних точках. Это условие выполняется для любой тройки точек, идущих подряд, значит, расстояния между любыми соседними точками одинаковые. Расстояние между крайними точками равно 47-2=45, между ними 15 одинаковых промежутков, поэтому расстояние между соседними точками равно 45:15=3. Между пятой и первой точкой 4 одинаковых промежутка длины 3, значит координата пятой точки равна $2 + 3 \cdot 4 = 14$.

Ответ: 14

5.

В сосуд вместимостью 6 л налито 4 л 70%-ного (по объёму) раствора серной кислоты, во второй сосуд той же вместимости налито 3 л 90% -ного раствора серной кислоты. Из второго сосуда в первый переливают некоторое количество раствора так, что в нём получается r-% -ный раствор серной кислоты. Найдите наибольшее целое значение r, при котором задача имеет решение.

Решение.

Пусть из второго сосуда перелито в первый x литров раствора. Поскольку из условия следует, что $0 \le x \le 2$, то для нахождения чистой кислоты в новом растворе получаем равенство $2{,}8 + 0{,}9x = (4 + x)\frac{r}{100}$, откуда $x = \frac{4r - 280}{90 - r}$. Теперь, учитывая, что $x \in [0;2]$, заключаем, что задача имеет решение лишь при $r \in \left[70; \frac{230}{3}\right]$. Таким образом наибольшее целое r, при котором задача имеет решение – это 76.

Ответ: 76

6.

Найдите корни уравнения $f(x) = 8$, если $4f(3-x) - f(x) = 3x^2 - 4x - 3$ для любого действительного значения x. В ответе укажите произведение найденных корней.

Решение:

Заметим, что при замене x на $3-x$ выражение $3-x$ меняется на x. То есть пара $f(x)$ и $f(3-x)$ инвариантна относительно данной замены. Заменим x на $3-x$ в уравнении, данном в условии задачи. Получим:
$4f(x) - f(3-x) = 3(3-x)^2 - 4(3-x) - 3 = 3x^2 - 14x + 12$. Выразим $f(x)$ из системы: $\begin{cases} 4f(3-x) - f(x) = 3x^2 - 4x - 3 \\ 4f(x) - f(3-x) = 3x^2 - 14x + 12 \end{cases}$. Умножим второе уравнение системы на 4 и сложим с первым, получим: $15f(x) = 15x^2 - 60x + 45$; $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Составим уравнение: $x^2 - 4x + 3 = 8$; $x^2 - 4x - 5 = 0$; его корни $x_1 = -1; x_2 = 5$. Произведение корней равно (-5).

Ответ: -5.

7.

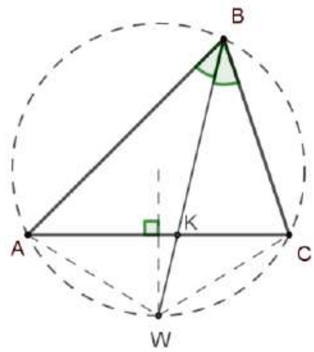
В треугольнике ABC проведена биссектриса AL ($L \in BC$), M и N точки на двух других биссектрисах (или на их продолжениях) такие, что $MA = ML$ и $NA = NL$, $\angle BAC = 50°$.
Найти величину $\angle MAN$ в градусах.

Решение

Воспользуемся вспомогательными утверждениями.

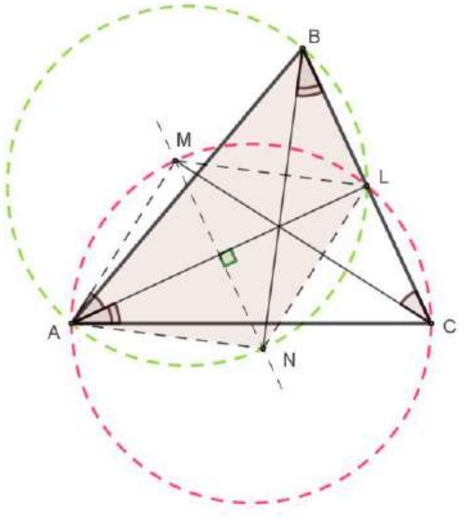
Если биссектриса BK в треугольнике ABC пересекает описанную окружность в точке W, то:

1) $AW = CW$ (так как $\angle CAW = \angle CBW = \angle ABW = \angle ACW$, то есть треугольник AWC равнобедренный и $AW = CW$).



2) Точка W лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AC.
3) Биссектриса угла неравнобедренного треугольника и серединный перпендикуляр к противоположной стороне пересекаются на описанной окружности.

Далее, рассмотрим треугольник ABL ($AB \neq BL$), MN серединный перпендикуляр к AL и BN – биссектриса угла B. Следовательно, точки A, B, L, N лежат на одной окружности.



Аналогично, точки A, C, L, M лежат на одной окружности.
Тогда:

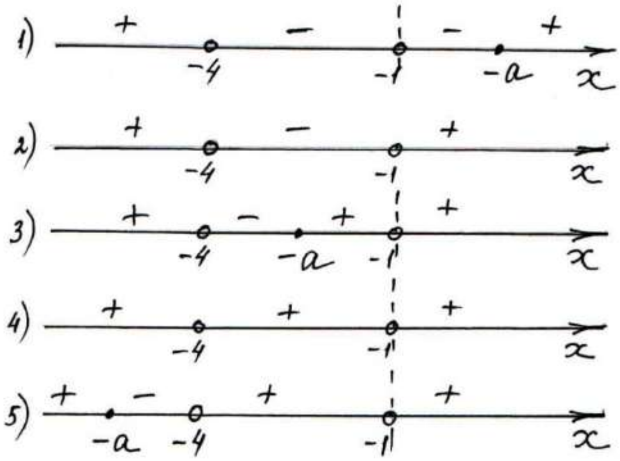
$$\angle MAN = \angle LAM + \angle LAN = \angle LCM + \angle NBL =$$
$$= \frac{\angle C + \angle B}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A = 90^\circ - \frac{1}{2} \cdot 50^\circ = 65^\circ.$$

Ответ. 65.

8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений неравенства $\frac{x^2+(a+1)x+a}{x^2+5x+4} \ge 0$ является объединение трёх непересекающихся интервалов. В ответе укажите сумму трёх наименьших целых значений a из полученного интервала.

Решение

Разложим на множители числитель и знаменатель левой части неравенства, оно примет вид: $\frac{(x+1)(x+a)}{(x+1)(x+4)} \ge 0$. Возможно пять случаев расположения числа $(-a)$ относительно чисел (-4) и (-1). В каждом из случаев неравенство решается методом интервалов на числовой оси (см. рис.2). Выпишем результаты исследования: 1) $-a > -1;\ a < 1$ $x \in (-\infty; -4) \cup [-a; +\infty)$ - не подходит; 2) $-a = -1; a = 1$ $x \in (-\infty; -4) \cup (-1; +\infty)$ - не подходит; 3) $-4 < -a < -1;$ $a \in (1;4)$ $x \in (-\infty; -4) \cup [-a; -1) \cup (-1; +\infty)$ - подходит; 4) $-a = -4; a = 4$ $x \in (-\infty; -4) \cup (-4; -1) \cup (-1; +\infty)$; 5) $-a < -4; a > 4$ $x \in (-\infty; -a] \cup (-4; -1) \cup (-1; +\infty)$ - подходит. Таким образом, ответу на вопрос задачи удовлетворяют $a \in (1; +\infty)$. Наименьшие целые числа, входящие в данный интервал, это 2, 3 и 4. 2+3+4=9.



Ответ: 9.

9.

Вычислив число 8^{2021}, подсчитали сумму цифр в этом числе и записали полученный результат. Затем в новом записанном числе подсчитали сумму цифр и снова записали результат. Эти действия повторяли до тех пор, пока не получили однозначное число. Найти это число.

Решение.

Рассмотрим натуральные степени 8. Заметим, что четные степени числа 8 при делении на 9 дают остаток 1, а нечетные (включая и число 8^{2021}) – остаток 8. Действительно, проанализируем степени 8:

$$8^2 = (9-1)^2 = 9n+1,\ \ n \in N,$$

$$8^3 = (9n+1)\cdot 8 = 9k+8,\ \ k \in N,$$

$$8^4 = (9k+8)\cdot 8 = 9k\cdot 8 + 8^2 = 9k\cdot 8 + 9n + 1 = 9\cdot s + 1,\ \ s \in N.$$

Предположив, что $8^{2m-1} = 9t+8,\ \ t \in N, m \in N, m \geq 2,$ получим:

$$8^{2m} = 8^{2m-1}\cdot 8 = (9t+8)\ \cdot 8 = 9t\cdot 8 + 8^2 = 9t\cdot 8 + 9n + 1 = 9q+1,\ \ q \in N,$$

$$8^{2m+1} = 8^{2m}\cdot 8 = (9q+1)\cdot 8 = 9q\cdot 8 + 8.$$

Так как целое число при делении на 9 дает тот же остаток, что и сумма цифр этого числа, то сумма цифр числа 8^{2021} и суммы цифр последующих результатов суммирования при делении на 9 имеют один и тот же остаток 8.

Ответ. 8.