

Олимпиада «Ломоносов». Инженерные науки.

5 – 7 класс

1. Тепловое расширение (25 баллов)

В солнечный день бензин в цистерне бензовоза может нагреваться. Цистерна представляет собой полый стальной цилиндр с горизонтальной осью, длиной 8000 мм и диаметром 2000 мм, заполненный $x = 10$ кубометрами бензина при температуре $20\text{ }^{\circ}\text{C}$. Известно, что при нагреве на один градус объём бензина линейно увеличивается на $0,124\%$, а объём стали — на $0,0045\%$. Сколько литров воздуха останется в цистерне, когда бензин будет иметь температуру $t = 40\text{ }^{\circ}\text{C}$?

Вариация параметров

Для обеспечения вариативности заданий использовались следующие параметры:

- t — значения от 30 до 40 с шагом 1;
- x — значения от 10 до 20 с шагом 1.

Справочные данные

Для нахождения объёма цистерны воспользуйтесь выражением

$$V = \pi \frac{D^2}{4} \cdot h,$$

где D — диаметр цистерны, а h — её длина.

В условиях данной задачи принять $\pi = 3,1416$.

Требования к ответу

Ответ выразите в литрах и представьте в виде числа, округлив с точностью до целых, без указания единиц измерения.

Возможное решение

1. Объём цистерны: $V_{\text{ц}} = H \cdot \pi \cdot r^2 = 8 \cdot \pi \cdot 1 = 25,133\text{ м}^3$.

2. При нагревании цистерны бензин и цистерна будут при одинаковой температуре.

3. При нагревании цистерны на $\Delta t = t - 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ её объём увеличится на долю $\alpha = 4,5 \cdot 10^{-5} \cdot (t - 20) = 0,0009$.

4. При нагревании бензина на $\Delta t = t - 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ его объём увеличится на долю $\beta = 124 \cdot 10^{-5} \cdot (t - 20) = 0,0248$.

5. Объём воздуха после нагрева:

$$V_{\text{возд}} = V_{\text{ц}}(1 + \alpha) - V_6(1 + \beta)$$

6. При подстановке данных и значений параметров $t = 40\text{ }^{\circ}\text{C}$, $x = 10\text{ м}^3$ в итоговую формулу, получим значение объёма в литрах:

$$V_{\text{возд}} = 8 \cdot 3,1416 \cdot 1 \cdot (1000 + 4,5 \cdot 10^{-2} \cdot (t - 20)) - x \cdot (1000 + 124 \cdot 10^{-2} \cdot (t - 20)) =$$
$$= 8 \cdot 3,1416 \cdot 1 \cdot (1000 + 4,5 \cdot 10^{-2} \cdot 20) - 10 \cdot (1000 + 124 \cdot 10^{-2} \cdot 20) = 14907,41952 = 14907$$

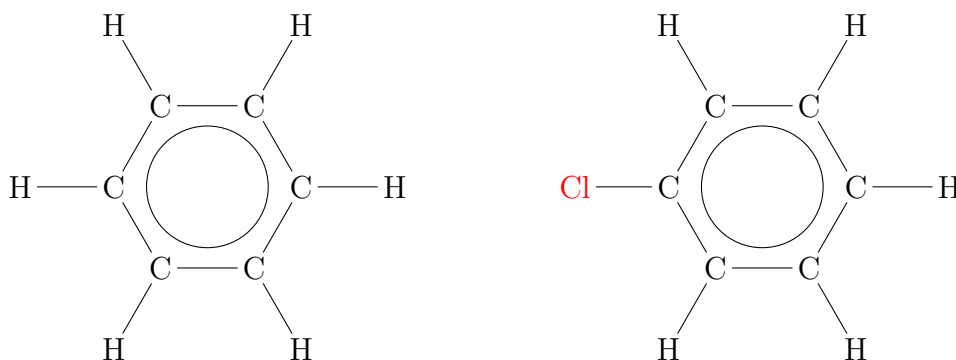
Ответ: 14907.

2. Бензол (25 баллов)

Атомам углерода (их обозначают буквой С) удобно соединяться в кольцо, которое содержит шесть атомов (атомы расположены в вершинах правильного шестиугольника). Примером такого соединения атомов может служить молекула бензола, схематично изображённая на рисунке слева (такой рисунок называется структурной формулой). Атомы водорода обозначены буквой Н, а химические связи — линиями. Химическая формула бензола выглядит так: C_6H_6 — индексами обозначено число атомов данного типа. Можно получить молекулу хлорбензола, в которой один из атомов водорода замещён атомом хлора (см. рис. справа). Можно в молекуле заместить два и более атомов водорода атомами хлора. Сколько различных молекул можно получить из бензола путём замещения одного или нескольких атомов водорода атомами хлора? Молекулы считаются одинаковыми, если при повороте они становятся идентичными. Укажите в ответе число таких молекул, а в решении нарисуйте структурную формулу каждой из них.

Требования к ответу

Количество различных молекул, которые можно получить из бензола путём замещения одного или нескольких атомов водорода атомами хлора, запишите в виде целого числа.

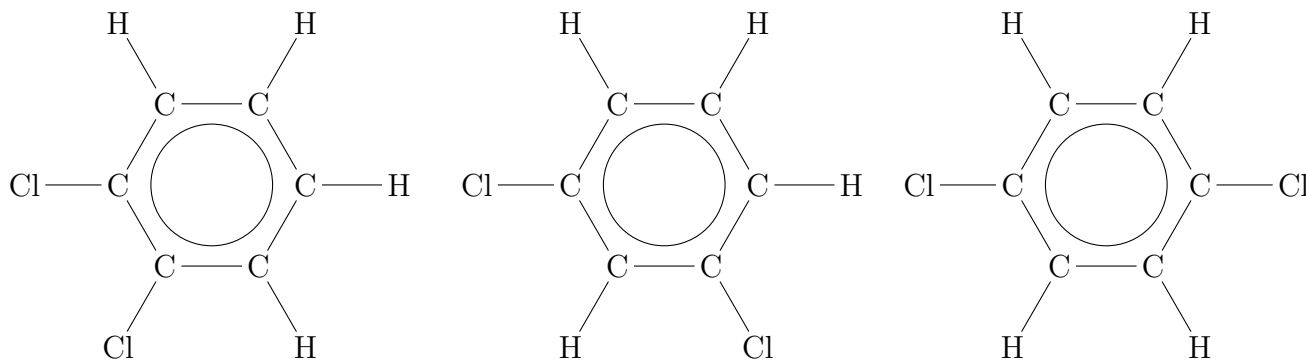


Возможное решение

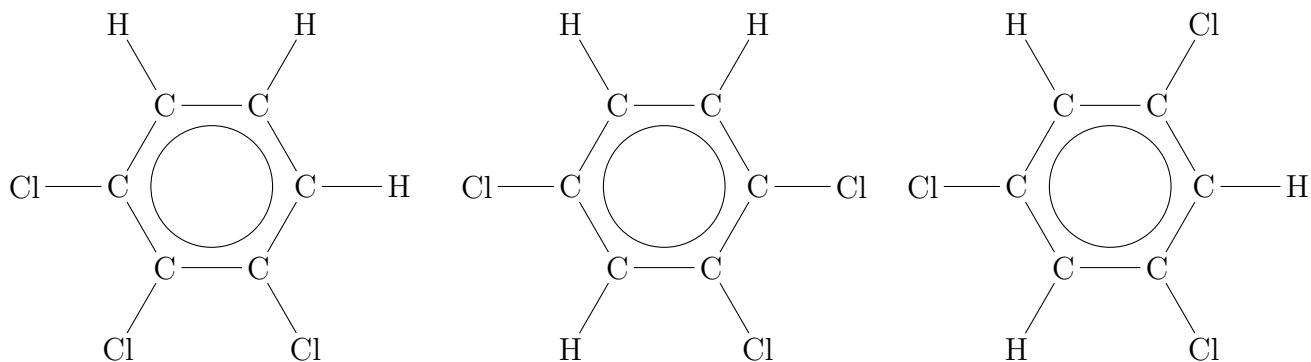
Можно определить число различных молекул простым перебором.

Хлорбензол — 1 молекула.

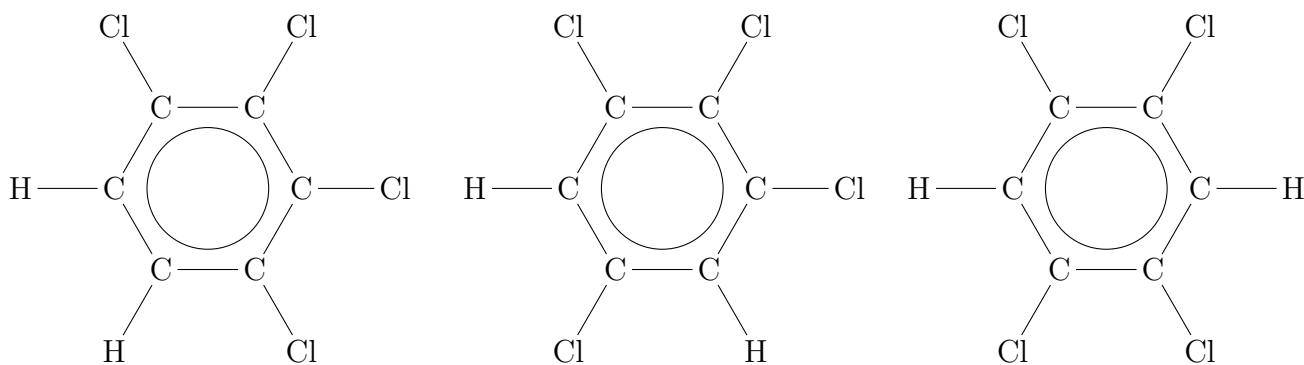
Дихлорбензол — 3 молекулы.



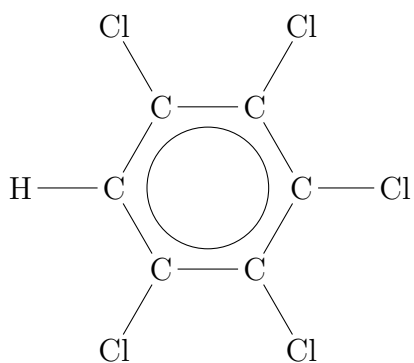
Трихлорбензол — 3 молекулы



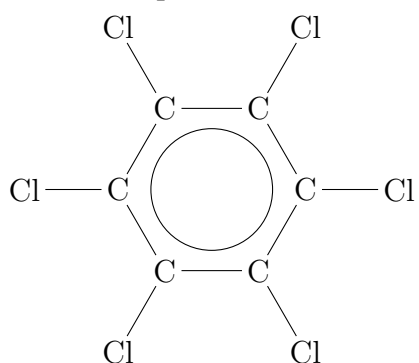
Тетрахлорбензол — 3 молекулы (структурные формулы получаются заменой в дихлорбензоле всех атомов хлора на атомы водорода и наоборот).



Пентахлорбензол — 1 молекула.



Гексахлорбензол — 1 молекула.



Всего — 12 различных молекул

Ответ: 12.

3. Климат на планете Железяка (25 баллов)

Какова среднесуточная температура в первый день лета в некоторой точке на планете Железяке, если она равномерно растёт от $30\text{ }^{\circ}\text{C}$ до $60\text{ }^{\circ}\text{C}$ с полуночи до 10 часов утра по местному времени, затем до 3 часов дня остаётся равной $60\text{ }^{\circ}\text{C}$ и, наконец, равномерно падает до $40\text{ }^{\circ}\text{C}$ до полуночи? Известно, что в сутках на планете Железяка 24 часа. Ответ выразите в единицах измерения, указанных в условии.

Требования к ответу

Значение среднесуточной температуры запишите в виде числа, округлив до целого, без указания единиц измерения.

Возможное решение

1. Для наглядности построим график температуры от времени

2. На первом участке — средняя температура равна полусумме начальной и конечной температур, т.е. $45\text{ }^{\circ}\text{C}$.

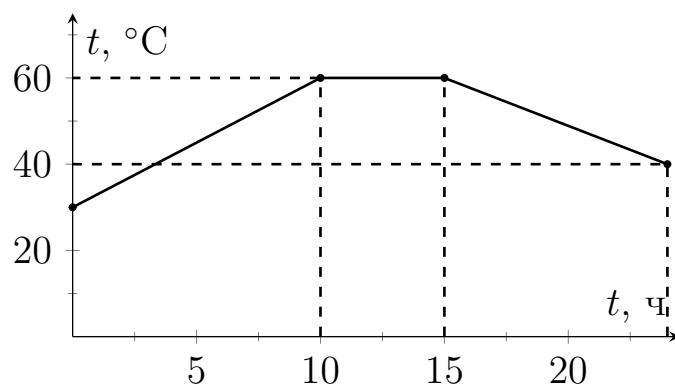
3. На втором участке — средняя температура равна $60\text{ }^{\circ}\text{C}$.

4. На третьем участке — средняя температура равна $50\text{ }^{\circ}\text{C}$.

5. Средняя температура за сутки —

$$t = 1/24 (45 \cdot 10 + 60 \cdot 5 + 50 \cdot 9) = 50\text{ }^{\circ}\text{C}.$$

Ответ: 50.



4. Подготовка практикума для студентов (25 баллов)

Лаборанту поручили подготовить несколько вариантов задания для студенческого практикума. У лаборанта есть примерно 100 г некоторого вещества в виде порошка, а также 300 мл раствора А и 150 мл раствора В. В задании студентам будет нужно на каждый 1 г порошка добавить либо 3 мл раствора А, либо 4 мл раствора В.

Для взвешивания порций порошка имеются простые равноплечие рычажные весы и ёмкости для взвешивания. Если массы на чашках весов немного различаются, то весы можно уравновесить регулировочными винтами (длина плеч рычагов остаётся неизменной).

Например, чтобы взвесить 1 г порошка, нужно:

- 1) поместить на чаши весов две примерно одинаковые пустые ёмкости и уравновесить весы с помощью винтов,
- 2) поместить на одну чашу весов гирьку массой 1 г,
- 3) добавлять порошок в ёмкость на другой чаше до тех пор, пока весы вновь не придут в равновесие.

В ёмкости для взвешивания окажется 1 г порошка.

Каждому студенту нужно было подготовить индивидуальный комплект: ёмкость с порошком известной массы и колбу с необходимым объёмом одного из растворов.

Подготовить колбы с раствором не составляло труда. Но, к сожалению, большинство гирек для взвешивания порошка было утеряно — у лаборанта есть лишь две гирьки массой 3 г и одна гирька массой 5 г. Лаборант может добавлять порошок в ёмкость одной или несколькими порциями, а также удалять избыток порошка. Однако масса порошка, не взвешенного на весах, считается недостоверной. Кроме того, все ёмкости для взвешивания незначительно отличаются по массе: различие в массе не выражается целым числом граммов.

Какое максимальное количество разных комплектов задания может составить лаборант? Варианты задачи, в которых выданы одинаковые массы порошка, но для определения предложены разные растворы (А или В), считаются разными.

Требования к ответу

Максимальное количество разных вариантов задания, которые может составить лаборант, записать в виде целого числа.

Возможное решение

1. Вначале покажем, как с использованием имеющихся гирек можно взвесить 1 г порошка:

- уравновесим на весах пустую ёмкость для взвешивания с помощью регулировочных винтов¹.
- поместим на другую чашку весов трехграммовую гирьку и вновь уравновесим весы, добавляя порошок в ёмкость. Теперь в нашей ёмкости 3 г порошка.
- снимем гирьку с весов и вновь уравновесим их (не снимая ёмкость с порошком).
- поместим на чашу весов с ёмкостью с порошком пятиграммовую гирьку, а на пустую чашу весов — гирьку массой 3 г.
- чтобы теперь уравновесить весы, нужно отобрать из ёмкости 2 г порошка. Теперь в ёмкости 1 г порошка ровно.

Понятно, что, повторяя эти операции не с изначально пустой ёмкостью, а с ёмкостью, в которой уже есть 1 г порошка, в результате мы получим 2 г порошка в ёмкости. Таким образом, используя имеющееся оборудование, можно получить взвешенную порцию порошка массой, равной любому натуральному числу грамм (разумеется, пока не кончится порошок). При этом порошок можно использовать полностью. Например, если после приготовления последней порции порошка у нас останется всего 2 г, мы сможем взвесить их точно, уравновесив весы с пустой ёмкостью, а затем поместив гирьку массой 3 г на ту же чашу весов, что и ёмкость, и пятиграммовую гирьку — на вторую чашу весов.

¹Если хода регулировочных винтов не хватит, то на вторую чашу можно поставить какую-нибудь ёмкость для взвешивания. Для решения здесь и далее не принципиально, как именно мы уравнивали весы — подстройкой винтов или размещением пустых ёмкостей на чашах. В дальнейшем в решении не будем конкретизировать, как именно мы уравниваем чаши.

2. Теперь разберемся, какие порции порошка нам нужно взвешивать, чтобы получить максимальное количество индивидуальных комплектов. Раствора А у лаборанта хватит на анализ всей массы порошка, а раствора В — не более чем на 37 г. Понятно, что максимальное число порций разной массы реализуется при последовательном приготовлении навесок порошка массой в целое число граммов, начиная с 1 грамма. Начинать нужно с навесок, которые потом будут укомплектованы раствором В, т.к. его хватит на меньшее количество порошка.

3. Попробуем разбить 37 г на максимальное количество порций различной массы в виде последовательных натуральных чисел.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36 \text{ г.}$$

Больше уникальных индивидуальных комплектов с использованием раствора В составить нельзя. Всего получится 8 комплектов с раствором В.

4. После составления 8 индивидуальных комплектов с использованием раствора В у нас останется не более 64 г порошка.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55,$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 66.$$

Поэтому с использованием раствора А получится еще 10 различных индивидуальных комплектов.

5. Соответственно, общее количество различных индивидуальных комплектов:

$$8 + 10 = 18.$$

Ответ: 18.