

Министерство науки и высшего образования РФ
Совет ректоров вузов Томской области
Открытая региональная межвузовская олимпиада 2021-2022
МАТЕМАТИКА (10 класс)
Заключительный этап
Вариант 1

1. Найдите все значения n , при которых сумма

$$1! + 2! + 3! + \dots + n!, \text{ где } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n,$$

является точным квадратом.

2. Про квадратный трехчлен $p(x) = (a+1)x^2 - (a+1)x + 2022$ известно, что $-2022 \leq p(x) \leq 2022$ при $x \in [0; 1]$. Найдите наибольшее возможное значение a .

3. Найдите значение выражения $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, если относительно a, b, c известно, что это три различных действительных числа, удовлетворяющих условиям:
 $a^3 - 2022a + 1011 = 0, \quad b^3 - 2022b + 1011 = 0, \quad c^3 - 2022c + 1011 = 0.$

4. Докажите, что неравенство

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + bz)^2 - (by + cx)^2 - (cz - ay)^2 \geq 0$$

выполняется для любых значений переменных a, b, c, x, y, z .

5. Через вершину M некоторого угла, проведена окружность, пересекающая стороны угла в точках N и K , а биссектрису этого угла – в точке L . Найдите сумму длин отрезков MN и MK , если площадь $MNLK$ равна 25, а угол LMN равен 30° .

Министерство науки и высшего образования РФ
Совет ректоров вузов Томской области
Открытая региональная межвузовская олимпиада 2021-2022
МАТЕМАТИКА (10 класс)
Заключительный этап
Вариант 2

1. Решите уравнение в целых числах

$$2025^x - 100xy + 3 - y^2 = 0.$$

2. Про квадратный трехчлен $p(x) = (a-1)x^2 - (a-1)x + 2022$ известно, что $-2022 \leq p(x) \leq 2022$ при $x \in [0; 1]$. Найдите наибольшее возможное значение a .

3. Найдите значение выражения $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, если относительно a, b, c известно, что это три различных действительных числа, удовлетворяющих условиям:

$$a^3 - 2020a + 1010 = 0, \quad b^3 - 2020b + 1010 = 0, \quad c^3 - 2020c + 1010 = 0.$$

4. Докажите, что неравенство

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax - bz)^2 - (by - cx)^2 - (cz - ay)^2 \geq 0$$

выполняется для любых значений переменных a, b, c, x, y, z .

5. Через вершину M некоторого угла, проведена окружность, пересекающая стороны угла в точках N и K , а биссектрису этого угла – в точке L . Найдите сумму длин отрезков MN и MK , если площадь $MNLK$ равна 49, а угол LMN равен 30° .