Министерство науки и высшего образования РФ
Совет ректоров вузов Томской области
Открытая региональная межвузовская олимпиада 2021-2022
МАТЕМАТИКА (9 класс)
Заключительный этап
Вариант 1

1. Существуют ли целые числа x и y такие, что $(x+2019)(x+2020)+(x+2020)(x+2021)+(x+2019)(x+2021)=y^2$?

Ответ: нет, не существуют.

Решение. Пусть $k = x+2019$, тогда уравнение примет вид

$$k(k+1)+(k+1)(k+2)+k(k+2)=y^2 \quad \text{или} \quad 3k^2+6k+2=y^2.$$

Левая часть уравнения при делении на 3 дает остаток 2, а квадрат целого числа при делении на 3 может давать остаток или 0 или 1. Следовательно, целых k и y не существует, а значит и целого x тоже не существует.

2. В спортивном магазине за два дня продали тринадцать пар кроссовок, два спортивных костюма и одну футболку, при этом в первый день была выручена такая же сумма денег, что и во второй день (от продажи вышеперечисленного товара). Одна пара кроссовок дешевле спортивного костюма и дороже футболки на одну и ту же сумму. Сколько продали пар кроссовок и костюмов в один день с футболкой?

Ответ: 8 пар кроссовок и ни одного спортивного костюма.

Решение. Пусть в один день с футболкой продали x костюмов и y пар кроссовок. Тогда в другой день продали $2-x$ костюмов и $13-y$ пар кроссовок.
Пусть с $-$ цена одной пары кроссовок, а s $-$ разница цен.
Тогда из условия задачи следует, что

$$x(c+s)+yc+(c-s)=(2-x)(c+s)+(13-y)c,$$
$$(14-2x-2y)c=(2x-3)s.$$

Число x может принимать значение 0, 1 или 2. Рассмотрим по очереди каждое из них

1) $x=0 \Rightarrow (2y-14)c=3s$. Так как $0<s<c$, то $0<(2y-14)c<3c \Rightarrow$
$$0<(2y-14)<3 \Rightarrow y=8 - \text{един. целое}$$

2) $x=1 \Rightarrow (2y-12)c=s$. Так как $0<s<c$, то $0<(2y-12)c<c \Rightarrow$
$$0<(2y-12)<1 \Rightarrow y - \text{ целых нет.}$$

3) $x=2 \Rightarrow (10-2y)c=s$. Так как $0<s<c$, то $0<(10-2y)c<c \Rightarrow$
$$0<(10-2y)<1 \Rightarrow y - \text{целых нет.}$$

Таким образом, описанная в условии задачи ситуация может осуществиться только при $x=0$, $y=8$.

3. Найдите $g(2022)$, если для любых действительных x, y выполняется равенство

$$g(x-y)=2022\big(g(x)+g(y)\big)-2021xy.$$

Ответ: $\mathbf{2043231}$.

Решение. Подставим $x=y=0$, получим

$$g(0)=2022\big(g(0)+g(0)\big)-2021\cdot 0 \Rightarrow g(0)=0.$$

Подставим $x=y$, получим

$$g(0)=2022\big(g(x)+g(x)\big)-2021\cdot x^2 \Rightarrow g(x)=\frac{2021x^2}{2\cdot 2022} \Rightarrow$$
$$g(2022)=\frac{2021\cdot 2022^2}{2\cdot 2022}=\frac{2021\cdot 2022}{2}=2021\cdot 1011=2043231.$$

4. Докажите, что выражение

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+bz)^2-(by+\ cx)^2-(cz-ay)^2$$

можно представить в виде полного квадрата некоторого многочлена от переменных, входящих в данное выражение.

Доказательство.

Раскрывая скобки и приводя подобные, получаем

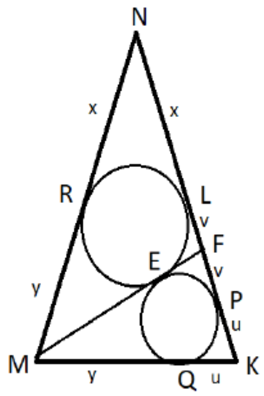
$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+bz)^2-(by+\ cx)^2-(cz-ay)^2=$$
$$=a^2z^2+b^2x^2+c^2y^2-2abxz-2bcxy+2acyz=(az-bx+cy)^2.$$

5. В равнобедренном треугольнике MNK стороны $MN=NK=8$, $MK=4$. На стороне NK выбрана точка F так, что окружности, вписанные в треугольники MNF и MKF, касаются друг друга. Найдите площади треугольников MNF и MKF.

Ответ: $\boldsymbol{S_{MNF}=3\sqrt{15},\ S_{MKF}=\sqrt{15}.}$

Решение.

Обозначим через R,L,E,P,Q – точки касания, x,y,u,v – длины отрезков касательных, как указано на рисунке.



Тогда

$$\begin{cases} x+y=8,\\ y+u=4,\\ x+2v+u=8.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-u=(x+v)-(u+v)=4,\\ (x+v)+(u+v)=8.\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+v=6,\\ u+v=2.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} NF=6,\\ FK=2.\end{cases}$$

Следовательно,

$$\frac{S_{MNF}}{S_{MKF}}=\frac{NF}{FK}=3 \Rightarrow S_{MKF}=\frac{1}{4}S_{MNK}=\frac{1}{8}\ MK\sqrt{MN^2-\frac{(MK)^2}{4}}=\frac{1}{2}\ \sqrt{8^2-\frac{4^2}{4}}=\frac{1}{2}\ \sqrt{60}=\sqrt{15}.$$

Тогда $S_{MNF}=3S_{MKF}=3\sqrt{15}.$

Критерии оценивания приведены в таблице:

Баллы	Критерии оценивания
7	Полное обоснованное решение.
6	Обоснованное решение с несущественными недочетами.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.
1	Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.
0	Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Министерство науки и высшего образования РФ
Совет ректоров вузов Томской области
Открытая региональная межвузовская олимпиада 2021-2022
МАТЕМАТИКА (9 класс)
Заключительный этап
Вариант 2

1. Существуют ли целые числа x и y такие, что $(x+2020)(x+2021)+(x+2021)(x+2022)+(x+2020)(x+2022)=y^2$?
Ответ: нет, не существуют.

Решение. Пусть $k = x+2020$, тогда уравнение примет вид
$$k(k+1)+(k+1)(k+2)+k(k+2)=y^2 \quad \text{или} \quad 3k^2+6k+2=y^2.$$
Левая часть уравнения при делении на 3 дает остаток 2, а квадрат целого числа при делении на 3 может давать остаток или 0 или 1. Следовательно, целых k и y не существует, а значит и целого x тоже не существует.

2. Миша пригласил на празднование своего дня рождения восемнадцать друзей со спортивной секции и двух своих братьев, всего двадцать гостей. Все гости и сам Миша, разместившись за двумя столами, съели все хот-доги, поданные поровну на оба стола, причем ели все только со своего стола. Каждый друг из спортивной секции съел хот-догов больше каждого брата Миши, но меньше Миши на одно и тоже количество штук. Сколько друзей из спортивной секции и сколько братьев сидело за одним столом с Мишей?
Ответ: 9 друзей из спортивной секции и ни одного брата.

Решение. Пусть за одним столом с Мишей сидели x братьев и y друзей из спортивной секции. Тогда за другим столом сидели $2-x$ брата и $18-y$ друзей из спортивной секции.
Пусть с $-$ количество хот-догов, которые съел каждый друг из спортивной секции, а s $-$ разница (постоянная) в хот-догах, упоминаемая в условии задачи.
Тогда согласно условию задачи запишем
$$x(c-s)+yc+(c+s)=(2-x)(c-s)+(18-y)c,$$
$$(2x+2y-19)c=(2x-3)s.$$
Число x может принимать значение 0, 1 или 2. Рассмотрим по очереди каждое из них
1) $x=0 \Rightarrow (19-2y)c=3s$. Так как $0<s<c$, то $0<(19-2y)c<3c \Rightarrow$
$$0<(19-2y)<3 \Rightarrow y=19-\text{един. целое}$$
2) $x=1 \Rightarrow (17-2y)c=s$. Так как $0<s<c$, то $0<(17-2y)c<c \Rightarrow$
$$0<(17-2y)<1 \Rightarrow y - \text{ целых нет.}$$
3) $x=2 \Rightarrow (2y-15)c=s$. Так как $0<s<c$, то $0<(2y-15)c<c \Rightarrow$
$$0<(2y-15)<1 \Rightarrow y - \text{целых нет.}$$
Таким образом, описанная в условии задачи ситуация может осуществиться только при $x=0$, $y=9$.

3. Найдите $g(2021)$, если для любых действительных x, y выполняется равенство
$$g(x-y)=2021\big(g(x)+g(y)\big)-2022xy.$$
Ответ: 2043231.

Решение. Подставим $x=y=0$, получим
$$g(0)=2021\big(g(0)+g(0)\big)-2022\cdot 0 \Rightarrow g(0)=0.$$
Подставим $x=y$, получим

$$g(0) = 2021\big(g(x) + g(x)\big) - 2022 \cdot x^2 \Rightarrow \; g(x) = \frac{2022x^2}{2 \cdot 2021} = \frac{1011x^2}{2021} \Rightarrow$$
$$g(2021) = \frac{1011 \cdot 2021^2}{2021} = 1011 \cdot 2021 = 2043231.$$

4. Докажите, что выражение

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax - bz)^2 - (by - \; cx)^2 - (cz - ay)^2$$

можно представить в виде полного квадрата некоторого многочлена от переменных, входящих в данное выражение.

Доказательство.

Раскрывая скобки и приводя подобные, получаем

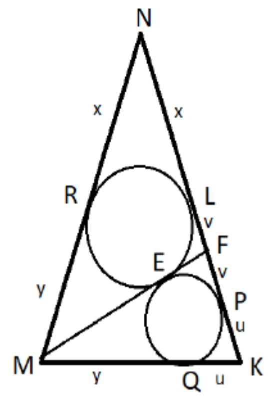
$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax - bz)^2 - (by - \; cx)^2 - (cz - ay)^2 =$$
$$= a^2z^2 + b^2x^2 + c^2y^2 - 2abxz + 2bcxy - 2acyz = (az - bx - cy)^2.$$

5. В равнобедренном треугольнике MNK стороны $MN = NK = 12$, $MK = 8$. На стороне NK выбрана точка F так, что окружности, вписанные в треугольники MNF и MKF, касаются друг друга. Найдите площади треугольников MNF и MKF.

Ответ: $\boldsymbol{S_{MNF} = \frac{32\sqrt{2}}{3}, S_{MKF} = \frac{64\sqrt{2}}{3}}$.

Решение.

Обозначим через R, L, E, P, Q — точки касания,
x, y, u, v – длины отрезков касательных,
как указано на рисунке.



Тогда

$$\begin{cases} x + y = 12, \\ y + u = 8, \\ x + 2v + u = 12. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - u = (x + v) - (u + v) = 4, \\ (x + v) + (u + v) = 12. \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x + v = 8, \\ u + v = 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} NF = 8, \\ FK = 4. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\frac{S_{MNF}}{S_{MKF}} = \frac{NF}{FK} = 2 \Rightarrow S_{MKF} = \frac{1}{3}S_{MNK} = \frac{1}{6}\; MK\sqrt{MN^2 - \frac{(MK)^2}{4}} = \frac{8}{6}\sqrt{12^2 - \frac{8^2}{4}} = \frac{4}{3}\sqrt{128} = \frac{32\sqrt{2}}{3}.$$

Тогда $S_{MNF} = 2S_{MKF} = \frac{64\sqrt{2}}{3}$.

Критерии оценивания приведены в таблице:

Баллы	Критерии оценивания
7	Полное обоснованное решение.
6	Обоснованное решение с несущественными недочетами.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.

1	Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.
0	Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.